Guía de Estudio

MÓDULO 15

2024

CÁLCULO EN FENÓMENOS NATURALES Y PROCESOS SOCIALES

NL EDUCACIÓN

GABINETE DE IGUALDAD PARA TODAS LAS PERSONAS

EL GOBIERNO DEL NUEVO NUEVO LEÓN

PREPARATORIA ABIERTA

Coordinadora Estatal de Telebachillerato y del Subsistema de Preparatoria Abierta
Edith Alemán Ramírez

Departamento Académico de la Coordinación de Preparatoria Abierta
Elena Cisneros Rodríguez
Gretel Lizeth Marroquín Lara
Adrián Alcántara Solar
Penélope Linares Huerta
2023

¿Cómo empezar?

Estimado(a) alumno(a), la "guía de estudio" es una herramienta que te brindará recursos de estudio, para que tengas apoyo durante el proceso autodidacta en este sistema de bachillerato no escolarizado. La guía no reemplaza al libro de texto, pero es una herramienta para facilitar el aprendizaje.

Se compone de diferentes secciones:

Actividades: son ejercicios que podrás llevar a cabo para complementar la lectura de los conceptos clave.

Recurso: son en su mayoría ligas que te redirigirán a una página de apoyo, puede contener información adicional o ejercicios digitales interactivos.

Glosario: contiene la definición breve y concisa de algunas palabras que se consideran importantes en la lectura.

Para reflexionar: este apartado plantea preguntas que desarrollarán tu pensamiento crítico, mediante lecturas, estudios de caso, etc.

Las secciones anteriores construyen tu guía de estudio y son fundamentales, pues están pensadas en función de las competencias a desarrollar de este plan modular; por lo cual te extendemos una amplia invitación a utilizar todos estos elementos para que sean de provecho en este trayecto.

Al finalizar cada unidad habrá una autoevaluación, donde podrás poner a prueba tu conocimiento. Además de servir de refuerzo práctico, te hará saber si estás listo para tu examen del módulo. ¡Mucho éxito!

Índice

Unidad 1

1. El movimiento como razón de cambio y la derivada

¿Qué voy a aprender y cómo?

¿Qué? Técnicas matemáticas para explicar las relaciones causales de los procesos sociales y los diversos fenómenos que ocurren en la naturaleza.

¿Cómo? Mediante la aplicación del método de análisis cuantitativo y cualitativo propio de una rama de las matemáticas denominada cálculo, determinando el límite, derivada de una función, cálculo diferencial e integral.

1.1 Movimiento, cambio y límite.

El movimiento es una característica de las cosas que existen en la naturaleza, desde partículas muy pequeñas como los átomos y los electrones, hasta los cuerpos de grandes dimensiones como los planetas y las galaxias que experimentan cambios con respecto a su posición; dicho de otra forma, nada permanece eternamente en estado de reposo y el cálculo razona sobre su posición o el cambio en su posición bajo ciertos límites de sus parámetros.

El estudio de diversos fenómenos naturales que provocan efectos importantes en la sociedad (como el clima o los sismos), tienen sustento al tratar conceptos como el **movimiento, el cambio y el límite**. Las matemáticas representan una herramienta poderosa para modelar situaciones o problemas reales a partir del concepto **función**, y una de las más importantes para el planteamiento y resolución de diversos problemas relacionados con procesos de cambio es lo que conocemos hoy en día como **derivada de una función**, $\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$ que de forma objetiva describe la comparación entre magnitudes que cambian instantáneamente, es decir, describen la **razón instantánea de cambio**. La *razón de cambio* es la medida en que una variable cambia con respecto a otra.

Teniendo $f(x) = \frac{4}{3}x - 4$ examinemos los puntos donde **x** está "cerca" de **x = 6.**

Ya que:

$$f(x) = \frac{4}{3}x - 4$$

$$f(6) = \frac{4}{3}(6) - 4 = \frac{24}{3} - 4 = 8 - 4 = 4$$

$$f(6) = 4$$

1.2 La caída libre de un proyectil, un excelente punto de partida

La caída libre de un cuerpo permite determinar una razón instantánea de cambio, en este caso la velocidad, expresada por la siguiente función cuadrática:

$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + d_0$$

Actividad 1

Determina la velocidad justo en el primer segundo transcurrido de un móvil que se deja caer (velocidad inicial cero) desde la azotea de un edificio cuya altura es de 78.4 metros

1. ¿Qué ecuación se obtiene al sustituir los datos en la ecuación

____

2. ¿Qué te indica el signo negativo del coeficiente del término t^2?

____

3. ¿Cuál es el eje de simetría?

____

4. Si $t = 0$ en la función distancia $d(t)$, entonces, ¿cómo queda la ecuación que tuviste anteriormente?

____

5. El valor 78.4 determina el punto $(0, 78.4)$, ¿qué representa dicho valor?

____

6. Si $d(t) = 0$, ¿cómo queda la ecuación que encontraste?

____

7. Dado este resultado, ¿cuáles son los puntos donde corta la parábola al eje horizontal?

____

Las figuras a y b describen el fenómeno anterior desde la perspectiva de la física y la matemática respectivamente.

Figura a

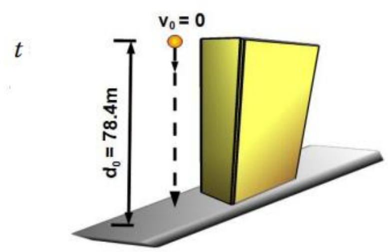
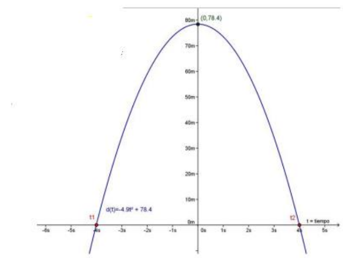


Figura b



En resumen: la velocidad promedio es la distancia final menos la distancia inicial entre el tiempo final, menos el tiempo inicial, es *decir*, ***representa la razón del incremento de la distancia respecto al incremento en el tiempo.***

El concepto llamado **límite** en una función, es el valor al que ***f(x)*** se acerca a medida que **x** se aproxima a algún número. El método de análisis que permite resolver el problema de encontrar la velocidad de un proyectil en caída libre para cualquier tiempo t, se conoce como **método de incrementos** y contribuye en la determinación de la razón instantánea de cambio.

1.3 Función un concepto matemático imprescindible para comprender nuestro entorno

Método de los incrementos

Este método consiste en aumentar una determinada cantidad arbitraria a una de las variables y proceder a analizar el comportamiento de la función incrementada.

El método de incrementos, también conocido como la **regla de los 4 pasos**, consiste en encontrar la derivada de cualquier función a partir de su definición. Los pasos son los siguientes:

1. Agregar el incremento en x y y.
2. Despejar Δy; se le resta la función original.
3. Dividir para Δx.
4. Evaluar el límite cuando Δx tiende a cero.

Teniendo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Es fácil de interpretar:

- Sumamos el incremento (paso 1) $f(x+h)$
- Restamos la función original (paso 2) $-f(x)$

- Dividimos entre el incremento (paso 3) h

- Evaluamos el límite cuando se tiende a cero (paso 4) $\lim_{h \to 0}$

En otros casos, también puedes ver la derivada usando incrementos, sin embargo, es exactamente lo mismo. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Ejemplo: Resuelve la siguiente derivada haciendo uso de la regla de los 4 pasos

$$y = 5x^2$$

Solución:

Primer paso: incrementamos en *ambos lados* $y + \Delta y = 5(x + \Delta x)^2$

Segundo paso (restamos la función original) $y + \Delta y - y = 5(x + \Delta x)^2 - 5x^2$

Podemos seguir haciendo el otro paso, pero no tendría caso si lo hacemos ya que debemos dejar clara la expresión que tenemos hasta ahora, y es momento para desarrollar el binomio al cuadrado, así que: $\Delta y = 5(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 5x^2$

Propiedad distributiva

$\Delta y = 5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 5x^2$

$\Delta y = 10x\Delta x + 5\Delta x^2$

Tercer paso (dividimos entre delta de X)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10x\Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x$$

Cuarto paso (evaluamos el límite)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (10x + 5\Delta x)$$

Como el delta x tiende a cero, es de esperarse que sea cero y al multiplicarse por 5 se elimina. Quedando solamente el término de 10 x.

Resultado:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x$$

Por lo que la derivada es $10x$

Este enfoque ofrece una definición que resulta útil para la determinación del **valor límite**

de una función.

Actividad 2

Resuelve los siguientes ejercicios con el método de los incrementos.

1. $y = 3x^3 - 2x^2 + 1$

2. $y = \frac{3x+2}{2x-1}$

3. $y = \sqrt{x+5}$

Definición formal de límite
Si *f(x)* se acerca arbitrariamente a un número *L* cuando x se aproxima a *c*, entonces el límite de *f(x)* cuando x se aproxima a c es *L* $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Esta definición nos quiere decir; que la función f(x) toma un valor "L" a medida que x se aproxima a algún número. La herramienta matemática conocida con el nombre de **función** permite representar y estudiar a través de lenguaje simbólico el comportamiento de nuestro entorno.

El concepto de **función matemática** es en términos prácticos lo siguiente:

Es el valor o la variación de una magnitud que queda determinada por otra magnitud de acuerdo con una cierta regla. A la primera magnitud se le denomina *variable dependiente*, mientras que la segunda recibe el nombre de *variable independiente*. Al conjunto de valores o números de la variable independiente se le llama **dominio de la función**, que, en otras palabras, representa el conjunto donde está bien definida. La descripción de función de una variable independiente se materializa en términos de símbolos matemáticos y a la vez es representada mediante una gráfica.

Las funciones tienen cuatro componentes principales:

1. El **dominio** o conjunto de los valores de la variable independiente $\mathbf{x}$ para los cuales está definida la función. Dichos valores se ubican a lo largo del eje horizontal (abscisas) del plano cartesiano y permiten que los valores de la variable dependiente y queden determinados por la relación: $\mathrm{f(x) = y}$.

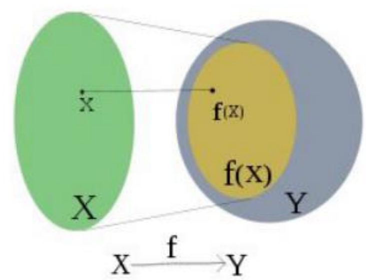
2. La **regla** $\mathbf{f(x)}$ que relaciona cada valor de la variable independiente **x** con un único valor de la variable dependiente $\mathbf{y}$.

3. La **imagen** o conjunto de los valores de la variable dependiente **y** que se ubican a lo largo del eje vertical (ordenadas), y cuyo valor se determina al aplicar la función a los valores asignados de la variable x.

4. La **gráfica** de la función o el conjunto de puntos en el plano cartesiano $\mathrm{(x, y) = (x, f(x))}$.

Una ***función matemática*** es una relación f, constituida por un conjunto de pares ordenados $\mathrm{(x,\ y)}$ que forman el conjunto solución de una ecuación de la forma

$\mathrm{y = f(x)}$, llamada regla de correspondencia entre dos conjuntos (dominio y codominio), y en el que no existen dos pares diferentes que tengan el mismo primer componente.



La función lineal

La gráfica de la función lineal es siempre una línea recta cuya forma general es:

$f(x) = mx + b$ lo que significa que multiplicamos el valor de "x" m veces y después agregamos "b" unidades.

Donde:

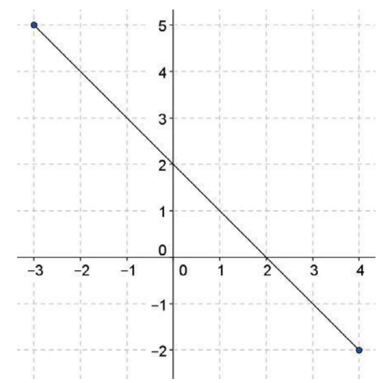
"m" se considera la pendiente, es decir, la pendiente es igual a la tangente del ángulo de inclinación. Por lo tanto, m= tan Θ

"b" es en donde cruza la recta el eje "y" o bien donde corta la recta al eje "y", por ejemplo: si b es 3, esto nos dice que la recta corta al eje "y" en un valor de positivo 3.

A modo de ejemplo:

Si f(x) = -x + 2

Acorde al formato y = mx + b, observamos que la m tiene un valor de -1. Esto nos indica que la pendiente es negativa, es decir, al aumentar el valor de "x" la "y" disminuye también el valor de b; en este caso positivo 2, es el valor en que la recta corta el eje "y" (Observa la figura de la derecha).



La función cuadrática en la variable x,

Se representa: $f(x) = ax^2 + bx + c$ dónde: a, b y c son cualquier número real, con (a ≠0) y su gráfica es una curva en "u". Si el signo del coeficiente "a" es positivo la parábola tendrá su abertura hacia arriba, en caso contrario si el signo es negativo "a" la parábola tendrá su abertura hacia abajo.

Las funciones trigonométricas (principales y secundarias)

Las funciones trigonométricas principales son: sen (x), cos (x) y tan (x), donde la función seno está definida por sen: $\mathrm{R} \rightarrow [-1, 1]$, es decir, el dominio de la función seno es el conjunto de los números reales y la imagen es el intervalo [−1, 1]. Además, tiene amplitud 1 y es de período 2π.

La función coseno es el conjunto de los números reales y la imagen es el intervalo [−1,1]. Además, tiene amplitud 1 y es de período $2\,\pi$

La función tangente está definida por el dominio:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n$$

con amplitud no definida y de periodo π. En otras palabras, *el dominio es el conjunto de los números reales* sin contemplar los múltiplos enteros impares de π medios, y la imagen son todos los reales.

Las funciones trigonométricas secundarias son cosecante, secante y cotangente:

$$\csc(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)},\ \sec(x)=\frac{1}{\cos(x)},\ \cot(x)=\frac{1}{\tan(x)}$$

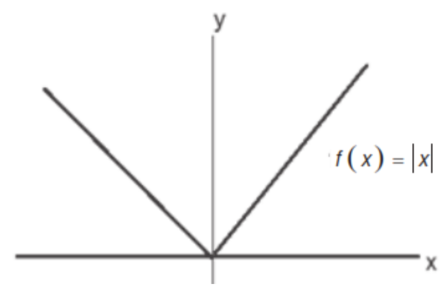
La función valor absoluto

El valor absoluto se representa por el símbolo $|x|$; si x es de signo positivo se queda igual, si es negativo se le cambia de signo para que quede positivo, por ejemplo:

$$|-10| = -(-10) = 10, \qquad |-10| = 10$$

Por lo tanto, se define de la siguiente manera: $f(x) = |x|$, donde el valor absoluto se define mediante la ecuación: $|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \leq 0 \end{cases}$

Lo gráfica del valor absoluto se observa en la figura de la derecha.

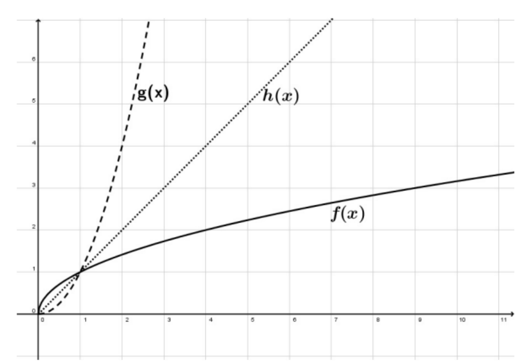


La función raíz cuadrada

Con ecuaciones y funciones cuadráticas en ocasiones es necesario eliminar el exponente de la incógnita o variable x, bajo el siguiente procedimiento:

Si $x^2 = 16$, entonces $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}$, lo cual implica que: $x = \pm 4$.

Lo anterior nos lleva a interpretar la función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$, definida para toda x positiva o igual a cero ($\forall x \geq 0$), como una función inversa de $g(x) = x^2$. (Observa la figura de la derecha).



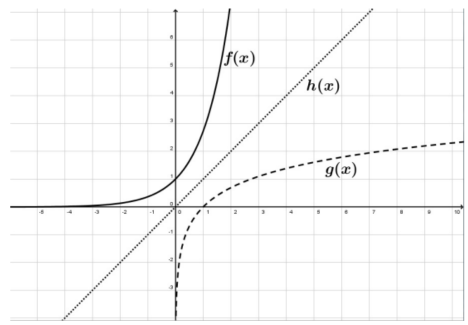
La función exponencial y logaritmo natural

Lee la siguiente explicación:

$f(x) = e^x$ y $g(x) = In\, x$, donde la función exponencial $f(x) = e^x$, se define $f: R \to (0, \infty)$ y en donde e ≈ 2.7182818284

A este número trascendente e irracional por naturaleza, se le conoce como el número de Euler. Una definición común del número de Euler a partir del concepto de límites es $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. La función logaritmo natural (que es una función inversa de la exponencial) $g(x) = In\, x$, se define mediante $g: (0, \infty) \to R$, y en donde se cumple que: $In(e^x) = x$, o de forma equivalente:$e^{In(x)} = x$, para toda $x > 0$. El logaritmo de un número x es el exponente y al cual hay que elevar la base para obtener x.

Las gráficas de la función exponencial y logaritmo natural (inversas entre sí) se muestran en la figura de la derecha.



Actividad 3

Realiza los siguientes ejercicios. Si tienes acceso a una calculadora con funciones de gráfica, utilízala.

1. Traza las gráficas de las siguientes funciones lineales:

a) $y(x) = -3x + 2$

b) $f(x) = x - 10$

2. Realiza las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas y determina el vértice:

a) $f(x) = x^2 - 10$

b) $h(x) = \ x^2 + 2x + 1$

3. Realiza las gráficas de las siguientes funciones exponencial y logaritmo natural:

a)$f(x) = -e^x$
b) $g(x) = -In(x)$

Construcción de la recta tangente a una curva, razón instantánea de cambio y la derivada de una función

Si el problema consiste en determinar la recta tangente a una curva arbitraria entonces se debe centrar en la determinación de la pendiente o inclinación de dicha recta en un punto dado de la curva. Lo anterior dio origen a la derivada de una función y por consiguiente a una de las herramientas más poderosas de las matemáticas, el llamado **Cálculo diferencial.**

Descripción de la pendiente de la recta tangente a una curva, la derivada

La pendiente de la secante está determinada por la tangente, y, por otra parte, la tangente está definida como cateto opuesto entre cateto adyacente, por lo tanto la pendiente de la recta es igual a $\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))}{((x+\Delta x)-x)}$ *La derivada es la pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de la función*.

De la misma forma, la pendiente de las rectas secantes, m_{sec}, que pasan por los puntos $P(x, f(x))\ y\ Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$, donde $\Delta x \neq 0$ queda establecida mediante $m_{sec} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Así pues. La recta tangente tendrá una pendiente m_{tan} cada vez más cercana a la pendiente de la recta secante m_{sec} conforme $x + \Delta x$ tiende a x, es decir, el incremento se hace cada vez más pequeño $\Delta x \to 0$. Este es el concepto de límite.

El límite es uno de los conceptos fundamentales de cálculo. Se llama la **derivada de la función f en el punto x.**

Definición 1 La derivada de una función: Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto x. La derivada de f en x, se escribe $f'(x)$, está dada por: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - fx}{\Delta x}$.

El símbolo $f'(x)$ se lee: f prima de x. La terminología $f'(x)$ existe, significa que el límite en la definición 1 existe. Si $f'(x)$ existe, se dice que la función f es diferenciable en x, o bien que la función f tiene derivada en x.

La Derivada como una función

Otra manera de ver la derivada, fuera de la definición 1 que es: la derivada de una función representa la pendiente de la recta que es tangente a la curva de dicha función en cierto punto.

Formas de representar la derivada de una función

A continuación, las diferentes formas de indicar una derivada:

$$f'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}' = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D_x f}(\boldsymbol{x})$$

Todas las notaciones anteriores significan lo mismo, es decir la derivada de la función. También puede verse como una operación en este caso "derivación". Para nuestro estudio utilizaremos de forma indistinta, de izquierda a derecha, las primeras cinco notaciones, en algunos casos se cambiarán. Las últimas dos notaciones de lado derecho se dejan para utilizarse en cursos avanzados.

Reglas básicas de derivación y razones de cambio

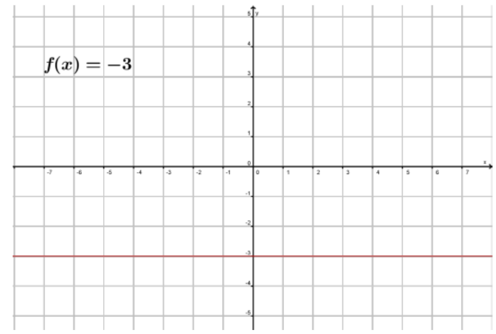
El hecho de utilizar la definición 1 para cada caso resulta complicada, por ello se presentan a continuación las principales reglas de derivación de funciones que permiten determinar las derivadas utilizando límites.

Regla de la función constante

Teorema 2 Regla de la constante

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es cualquier número real, entonces $f'(c) = \frac{d}{dx}[c] = 0$.

Una función constante es una recta paralela al eje de las x, por lo cual la recta tangente a esta función en cualquiera de sus puntos es ella misma; para obtener el valor de la derivada bastará con obtener la pendiente de esta recta y utilizar la fórmula: $Pendiente = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$, donde y_1 y y_2 son la segunda coordenada de cada punto tomado de la recta, la cual por ser la función constante sabemos que es la misma, por lo tanto $Pendiente = \frac{0}{(x_2 - x_1)} = 0$ puesto que los valores x_2 y x_1 son distintos si los puntos son distintos. **Varían los valores de x pero y siempre vale -3.**



Regla de la función potencia

Teorema 3 Regla de la potencia

Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es diferenciable y

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1}.$$

Para que la función f sea diferenciable en $x = 0$, el número n debe ser tal que x^{n-1} esté definido sobre un intervalo que contenga a 0.

Esto es: la derivada de una variable elevada a un exponente numérico es igual al valor del exponente numérico multiplicado por la variable elevada a la cantidad del exponente numérico restado por uno.

Ejemplo:

Si $f(x) = x^3$

$$\frac{d}{dx}\lfloor x^n \rfloor \; es \; nx^{n-1}$$

El exponente 3 representa el valor de n y al mismo tiempo, se le resta 1 quedando como potencia 2. Resultado de la derivada: $3x^2$

Regla del múltiplo constante de una función

Teorema 4 Regla del múltiplo constante

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable y k es un número real, entonces la función $k\,f(x)$ también es diferenciable y $y'(x) = \frac{d}{dx}\left[k\,f(x)\right] = k\,f'(x)$.

Se refiere a que la derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función. Por ejemplo, si $y = 5x - 2$, entonces $\frac{dy}{dx} = 5(1) = 5$. Otro ejemplo sería si $y = 4x^5$ entonces tenemos que $4\frac{d}{dx}x^5 = 4\,(5x^4) = 20\,x^4$.

Actividad 4

Resuelve las derivadas de función constante, función potencia y el múltiplo constante de una función

1. Regla de la función constante

$a)\ f(x) = 5$

$b)\ f(x) = 2$

$c) f(x) = -3$

2. Identifica cuáles de las siguientes funciones son constantes:

$f(x) = 4 \qquad g(x) = x + 3 \qquad h(x) = 0 \qquad z(x) = 5x$

3. Regla de la función potencia

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = 2x^5$

c) $f(x) = 3x^2 + 7$

4. Regla del múltiplo constante

a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = 4.(3x^4 - 6x^2)$

c) $f(x) = \sqrt{9}.(3x^2 - 5x + 4)$

Regla de la suma y diferencia de funciones

Teorema 5 Regla de la suma y resta (diferencia)

La suma (o la resta) de dos funciones diferenciables es diferenciable y la derivada de la suma es la suma (o resta) de sus derivadas:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Del análisis del teorema se puede establecer que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas. La regla de la diferencia establece que la derivada de la diferencia de funciones es igual a la diferencia de sus derivadas.

$$\frac{d}{dx}[f(x) \ + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \ + g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

Ejemplo 1: $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 9x + 2$

En el **primer término** se multiplica el exponente 3 por el coeficiente 2 y se obtiene $6x^2$ ya que al exponente 3 por regla, se le resta la unidad.
En el **segundo término** se multiplica el exponente 2 por el coeficiente 2 y se obtiene $4x$ después de restarle 1 al exponente 2
En el **tercer término**, x se eleva a la potencia cero por lo que se elimina y obtenemos solo el coeficiente 9
En el **último término** por ser número real, equivaler a 0.
El resultado es entonces: $\frac{d}{dx}f(x) = 6x^2 + 4x - 9$

Ejemplo 2: $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 9x - 4$

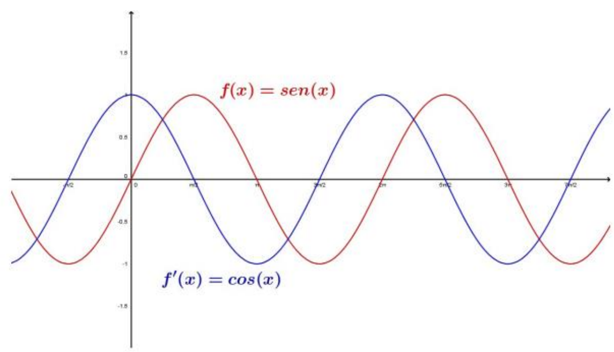
$$\frac{d}{dx}f(x) = 15x^2 + 12x - 9$$

Derivadas de las funciones seno y coseno

Teorema 6 Derivadas de las funciones seno y coseno

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}(x)\right]=\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos(x)\right]=-\operatorname{sen}(x)$$



Regla del producto de funciones

Teorema 7 Regla del producto

El producto de dos funciones diferenciables f y g es, en si mismo, diferenciable. Más aún, la derivada de fg es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f(x)\,g'(x)+g(x)\,f'(x).$$

Esta regla establece que se puede derivar un producto de funciones al obtener la suma de (a) primera función en forma original multiplicada por la derivada de la segunda función y (b) segunda función en forma original multiplicada por la derivada de la primera función.

Ejemplo 5 Usa la regla del producto y resuelve la siguiente función:

$$Si\ h(t) = (-t + t^2)(5 - 4t)$$

Entonces:

$$h'(t) = (-t + t^2)\ \frac{d}{dt}[5 - 4t]\ + (5 - 4t)\ \frac{d}{dx}(-t + t^2)$$

$$h'(t) = (-t + t^2)(-4) + (5 - 4t)(-1 + 2t)$$

$$h'(t) = (4t - 4t^2) + (-5 + 10t + 4t - 8t^2)$$

La respuesta final es:

$$h'(t) = -12t^2 + 18t - 5$$

Actividad 5

Aplica la regla de la suma y la diferencia de funciones, derivadas de funciones de seno y coseno y la regla del producto de funciones para resolver los siguientes ejercicios.

1. Regla de la suma y diferencia de funciones

a) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 8$

b) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

c)$f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

2. Derivadas de las funciones seno y coseno

a) $f(x) = sen(4x)$

b) $f(x) = sen(x^4)$

3. Regla del producto de funciones

a) $f(x) = (4x^2 + 1)(6x^3 - 7)$

b) $f(x) = x\ (x^2 +\ 2)$

c) $f(x) =$ (x +5) (x-5)

Regla del cociente de funciones

Teorema 8 Regla del cociente

El cociente de $\dfrac{f}{g}$ de dos funciones diferenciables f y g es, en si mismo diferenciable para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Más aún, la derivada de $\dfrac{f}{g}$ se expresa por el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

En resumen, la regla del cociente establece que se puede derivar un cociente de funciones; tomando el denominador $g(x)$ multiplicado por la derivada del numerador $f(x)$ restado al numerador $f(x)$ multiplicado por la derivada del denominador $g(x)$, todo dividido por el cuadrado del denominador $g(x)$.

Ejemplo 1: Se busca la derivada de la siguiente división de funciones:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\frac{d}{dx}[3x^2] - (3x^2)\frac{d}{dx}[2x+1]}{[2x+1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(6x) - (3x^2)(2)}{[2x+1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 6x - 6x^2}{[2x+1]^2}$$

Y la respuesta final es:

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 6x}{[2x+1]^2} = \frac{6x\,(x+1)}{[2x+1]^2}$$

$$f(x) = \frac{9x^2 + 5x}{6x^3}$$

Ejemplo 2:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(18x+5)\cdot 6x^3 - (9x^2+5x)\cdot 18x^2}{(6x^3)^2} \\
&= \frac{108x^4 + 30x^3 - 162x^4 - 90x^3}{36x^6} \\
&= \frac{-54x^4 - 60x^3}{36x^6} \\
&= \frac{-9x - 10}{6x^3}
\end{aligned}
$$

1.4 Derivadas de las funciones trigonométricas

A partir del teorema 6, es decir, del conocer las derivadas de las funciones seno y coseno, es posible determinar las derivadas de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

Teorema 9 Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\left[\tan(x)\right] = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cot(x)\right] = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sec(x)\right] = \sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\csc(x)\right] = -\csc(x)\cot(x)$$

Ejemplo: ¿Cuál es la derivada de la siguiente función?

$$f(x) = tan(3x^2)$$

El primer paso es identificar qué tipo de regla tenemos que aplicar a la función, vemos que es una trigonométrica y es fácil observar que aplica la derivada de una función trigonométrica tangente.

Derivamos de un lado y del otro, aplicamos el operador d/dx, resultando lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(\,tan(3x^2))$$

Por comodidad cambiamos la notación de la derivada de lado derecho, recordemos que es otra representación de la derivada de la función.

Aplicamos la regla de derivación correspondiente, solamente observemos que el argumento es $3x^2$, por ser diferente al de tabla; que es x. Amerita que también se derive, de hecho, esto aplica para todas las funciones trigonométricas, como lo revisamos en las derivadas de la función seno y coseno.

$$f\,'(x) = sec^2(3x^2)\frac{d}{dx}(\,3x^2)$$

Ya con práctica ésta derivada puede hacerse en un solo paso, pero hemos preferido hacerlo en pasos; para que puedas ver como se desarrolla.

$$f\,'(x) = sec^2(3x^2)(\,2\cdot 3x^{2-1})$$

Simplificando y reordenando, finalmente nos queda:

$$f\,'(x) = 6x\cdot sec^2(3x^2)$$

Regla de la cadena o derivada de una función compuesta

Básicamente la regla de la cadena expresa que, si la función y cambia $\frac{du}{dx}$ veces tan rápido como u, y dicha función u cambia $\frac{du}{dx}$ veces tan rápido como x, entonces la función y cambia $\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$ veces tan rápido como x.

Teorema 10 Regla de la cadena

Si $y=f(u)$ es una función diferenciable de u y $u=g(x)$ es una función diferenciable en x, entonces $y=f\big(g(x)\big)$ es una función diferenciable de x y

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

O de forma equivalente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\Big[f\big(g(x)\big)\Big]=f'\big(g(x)\big)\,g'(x)$$

Una función es *compuesta* si puede escribirse como $f(g(x))$. En otras palabras, es una función dentro de una función, o sea una función de una función. Esta regla solo sirve para hallar la derivada de funciones compuestas, no de cualquier tipo de función ni de operaciones con funciones. La regla de la cadena solamente se puede utilizar **cuando tenemos una función dentro de otra**.

> Por ejemplo, $\cos(x^2)$ es compuesta, porque si hacemos $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = x^2$, entonces $\cos(x^2) = f(g(x))$.
>
> g es la función dentro de f, por lo que decimos que g es la función "interior" y f la función "exterior".
>
> $$\underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{\text{interior}})}_{\text{exterior}} \qquad \ln(x) \cdot x^2 ✗ \quad \ln(x^2) ✅$$

En este ejemplo utilizaremos la regla de la cadena para derivar el logaritmo natural de x al cuadrado: $f(x) = In(x^2)$

La derivada del logaritmo natural es 1 partido por su argumento, por tanto, la derivada será:

$$f(x) = \ln(u) \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{u}$$

$$f(g(x)) = \ln(x^2) \quad \longrightarrow \quad f'(g(x)) = \frac{1}{x^2}$$

Por otro lado, la derivada de x elevada a dos es $2x$:

$$g(x) = x^2 \quad \longrightarrow \quad g'(x) = 2x$$

$$z(x) = f(g(x)) \quad \longrightarrow \quad z'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \ln(x^2) \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

En este segundo ejemplo derivaremos una función potencial que tiene como base un polinomio: $f(x) = (3x^2 + 4x - 5)^3$

Para derivar una potencia tenemos que poner delante el exponente original y restar una unidad en el exponente, por lo que la derivada de la función potencial sin aplicar la regla de la cadena sería:

$$f\left(g(x)\right) = \left(3x^2+4x-5\right)^3 \quad \longrightarrow \quad f'\left(g(x)\right) = 3\left(3x^2+4x-5\right)^2$$

Ahora derivamos lo de dentro del paréntesis:

$$g(x) = 3x^2+4x-5 \quad \longrightarrow \quad g'(x) = 6x+4$$

Y, por último, empleamos la regla de la cadena para resolver la derivada de toda la función, que será la multiplicación de las dos derivadas calculadas anteriormente:

$$z(x) = f\left(g(x)\right) \quad \longrightarrow \quad z'(x) = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

$$f(x) = \left(3x^2+4x-5\right)^3 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 3\left(3x^2+4x-5\right)^2\cdot(6x+4)$$

En la siguiente tabla, puedes ver las fórmulas de las derivadas de las funciones más elementales. También puedes observar en la tabla un ejemplo resuelto de cada tipo de derivada para que te ayude a comprender cómo se hace la derivada de la función.

	Función	Derivada	Ejemplo
1	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 5 \rightarrow$ $f'(x) = 0$
2	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = 7x \rightarrow$ $f'(x) = 7$
3	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\,.x^{n-1}$	$f(x) = x^3 \rightarrow$ $f'(x) = 3x^2$
4	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
6	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f'(x) = e^x \rightarrow$ $f'(x) = e^x$
7	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x\,In(a)$	$f(x) = 4^x \rightarrow$ $f'(x) = 4^x\,In(4)$
8	$f(x) = in(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = in(x) \rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x}$
9	$f(x)log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\,In\,(a)}$	$f(x)log_5(x) \rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x\,In\,(5)}$
10	$f(x) = sen\,(x)$	$f'(x) = \cos\,(x)$	$f(x) = sen\,(x) \rightarrow$ $f'(x) = \cos\,(x)$

11	$f(x) = \cos(x)$	$f'^{(x)} = -sen(x)$	$f(x) = \cos(x) \rightarrow$ $f'^{(x)} = -sen(x)$
12	$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ $= 1 + \tan^2(x)$	$f(x) = tan(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Nota importante: para este caso el exponente o argumento cuando no es x, es decir cualquier función cuadrática o "n" potencia, o cualquier función, o en el caso que solamente tenga la "x" un coeficiente adicional no uno, también se deberá derivar.

A continuación, incluimos algunos ejemplos que comprende todo lo visto hasta aquí de las reglas de derivación, a modo de conclusión. Esto es: las reglas fundamentales (suma, resta, multiplicación y división) y las avanzadas, vistas aquí mismo, desde luego la regla de la cadena o derivada de una función compuesta es una de las reglas de derivación avanzadas.

Ejemplo 1 ¿Cuál es la derivada de la siguiente función?

$$\text{h}(x) = 5^x(x+5)^5$$

El primer paso es identificar ¿qué tipo de derivada se trata?, una buena pista es identificar ¿cuántas funciones intervienen?, ¿y como están dispuestas entre sí; se suman, restan, multiplican o dividen?

Si vemos bien tenemos una función exponencial base 5 y otra función elevada a la quinta potencia. Por lo tanto, tenemos:

$f(x)$=$5^x . g(x) \ = \ (x+5)^5$ y observamos que se están multiplicando.

Ya identificado que es un producto de funciones y sabemos qué funciones están involucradas. Como inicio utilizaremos la fórmula de la regla del producto de funciones:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\ g(x)] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)\ g(x)] = (x+5)^5 . \frac{d}{dx}(5^x) + \ 5^x . \frac{d}{dx}((x+5)^5)$$

Segundo paso, es identificar que reglas tenemos que utilizar dependiendo de las funciones a derivar. Para este problema particular las reglas a utilizar son: la regla de cadena Teorema No. 10 y la derivación de base 5; que viene a ser la regla no. 7 de la tabla. Para ésta última es importante reconocer en la función exponencial de base 5, debemos derivar también el exponente, aunque en este caso el valor de la derivación del exponente x es uno.

$$\frac{d}{dx}[f(x)\ g(x)] = (x+5)^5.\left(5^x.In(5).(1)\right) + 5^x.\left(5.(x+5)^4.(1)\right)$$

Y la respuesta final es:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\ g(x)] = 5^x In(5)(x+5)^5 + 5^{(x+1)}.(x+5)^4$$

Ejemplo 2: ¿Cuál es la derivada de la siguiente función?

$$f(x) = (2x^2+5)^4$$

Lo primero es identificar que derivada de función se debe aplicar, observamos que la función está elevada a la cuarta potencia y dentro de los paréntesis la variable está elevada a otra potencia. Buscamos en la tabla y observamos que cuadra con la regla de la cadena. Por lo tanto, aplicamos la regla de cadena.

$$f\ '(x) = 4 \cdot 1(2x^2+5)^{4-1}(2 \cdot 2x^{2-1})$$

La regla de la cadena nos indica que debemos bajar y multiplicar el exponente por el coeficiente externo de toda la función en este caso 1. Acto seguido, se le resta 1, para este caso, al exponente 4 y se multiplica por la derivada de lo que contiene el paréntesis. Para lo que está dentro del paréntesis aplicamos la regla de función potencia.

$$f\ '(x) = 4(2x^2+5)^3(4x)$$

Reordenando términos, finalmente tenemos:

$$f\ '(x) = 16x(2x^2+5)^3$$

Ejemplo 3: ¿Cuál es la derivada de la siguiente función?

$$f(x) = 2e^{4x}$$

Primero identificamos qué tipo de regla de derivación tenemos que aplicar a la función. En la tabla vemos que puede ser la regla 6 o 7, por lo tanto, aplicamos la 6 por tener base "e", recordemos que "e" es un número descubierto por el gran matemático Leonard Euler, la otra regla no aplica porque es para una base "a" donde "a" puede representar cualquier número.

$$f\,'(x) = 2e^{4x}(4x^{1-1})$$

La regla 6 nos indica que debemos volver a escribir el exponente mismo con su base, el multiplicarlo por el coeficiente de la función para este caso 2, esto se debe por aplicar la regla del múltiplo de una función constante (Teorema 4), y que debemos multiplicar por la derivada del exponente en este caso es una función 4x. En la derivación del exponente al restarle 1 al exponente 1 actual de la función, da cero y sabemos que todo número o variable elevado a cero es uno.

Reordenando términos, la respuesta final es:

$$f(x) = 8e^{4x}$$

Es importante destacar que, en este contexto, la función tiene como base 'e' elevada a la potencia de 4x, lo que implica que debemos derivarla. Por otro lado, en el caso de la tabla, donde la función solo involucra 'x' sin ningún otro exponente, la derivación con respecto a 'x' resulta en un valor 1. Por lo tanto, aunque no sea directamente observable, es un aspecto importante para tener en cuenta en el análisis de la función.

Actividad 6

Resuelve los siguientes ejercicios de aplicación de derivadas de una función.

1. $f(x) = (x^2 - 3)^3$

2. $f(x) = 5e^{3x}$

3. $f(x) = \dfrac{19}{2x^2 - 2}$

4. $f(x) = tan(x)$

5. $f(x) = sec(x)$

1.5 Comportamiento de funciones, puntos críticos, máximos y mínimos.

Un aspecto central en el análisis del comportamiento de las funciones tiene que ver con los conceptos de valores extremos, la concavidad, sus puntos críticos y si la función es creciente o decreciente.

Definición de extremos

Sea f una función definida en un intervalo cerrado I que contiene al punto c.

1. $f(c)$ es el *mínimo de f sobre* I si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I.
2. $f(c)$ es el *máximo de f sobre I* si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I.

El mínimo y el máximo de una función sobre un intervalo son los *valores extremos*, o simplemente *extremos*, de la función sobre dicho intervalo. El mínimo y máximo de una función sobre un intervalo también se conocen como *mínimo absoluto* o *máximo absoluto* sobre el intervalo.

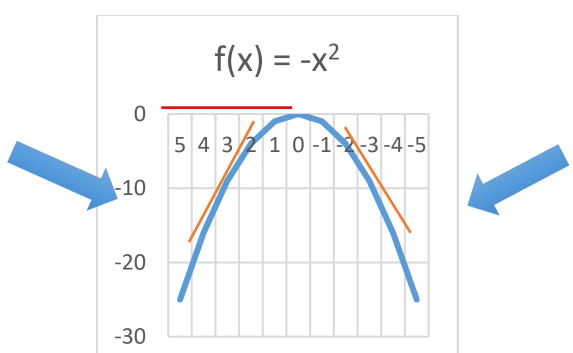
En el estudio de las parábolas, la derivada evaluada en el vértice es igual a cero y nos indican un cambio de comportamiento cualitativo y cuantitativo en la trayectoria descrita por la representación gráfica de la función.

Definición de punto crítico

Sea f una función definida en el punto c. Si $f'(c) = 0$ o si f' no está definida en c, entonces c es un *punto crítico* de f.

De acuerdo, con las definiciones anteriores y considerando una parábola que abre hacia abajo, el signo del coeficiente de la x^2 es negativo como es el caso de la gráfica siguiente:

La pendiente de cualquier recta tangente hasta antes del punto máximo, serán positivas. o bien derivada de la función será positiva.



La pendiente de cualquier recta tangente después del punto máximo, serán negativas. o bien derivada de la función será negativa.

En la gráfica anterior. Observamos que, en el valor máximo de la función, la pendiente de la recta es cero (marcada con rojo). Esta pendiente es la que marca el cambio de la pendiente de positivo a negativo, yendo de izquierda derecha en la gráfica.

Recordando que una parábola que abre hacia arriba, el signo del coeficiente de la x^2 es positivo. Es decir, podemos volver a considerar la misma función anterior, pero con signo contrario; $f(x) = x^2$ Para este caso el valor de la pendiente cero indicará un punto mínimo de la gráfica. Esta pendiente de valor cero es la que ahora marcará el cambio de la pendiente de negativo a positivo, yendo de izquierda derecha en esta nueva gráfica. Te sugerimos realizar este segundo ejercicio para comprender mejor estos conceptos.

Procedimiento para calcular: máximos y mínimos de una función con el criterio de la primera derivada.

1. Calcular la derivada de la función y = f(x)
2. Encontrar los puntos críticos, para esto iguale la derivada a cero. Y resuelva esta ecuación.
3. Analizar los cambios de signo de las pendientes, para esto dale un valor cercano al punto crítico antes y después. Utiliza tu criterio para esto, por ejemplo, el valor de x cuando es cero es una buena opción, con los siguientes ejemplos quedará mejor entendido esto.
   a. Si la pendiente cambia de positivo a negativo es un punto máximo
   b. Si la pendiente cambia de negativo a positivo es un punto mínimo
   c. Si no hay cambio no el a) ni tampoco el b)
4. Realice la gráfica de la función para observar los pasos anteriores.

Ejemplo 1; Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 2$ y traza la gráfica correspondiente para mostrar los puntos solicitados:

Solución:

Primero observemos que la función es una cuadrática, por lo tanto, la gráfica que vayamos a realizar debe tener forma de "U". también podemos ver que el coeficiente de x^2 tiene signo negativo por ser -2 es decir la U, va a abrir hacia abajo o bien la abertura de la parábola estará hacia abajo.

Seguimos el procedimiento explicado anteriormente.

1. Calcular la derivada de la función y = f(x)

$$f'(x) = -4x + 8$$

2. Encontrar los puntos críticos,

Para esto Igualamos la derivada a cero

$$f'(x) = -4x + 8 = 0$$

Por lo tanto, hay un punto crítico:

$$x = \frac{-8}{-4} = 2$$

3. Analizar los cambios de signo de las pendientes:

Tal como encontramos en el pasado 2, el punto crítico fue 2. Por lo tanto, podemos darle un valor antes y uno después entre más cercano es mejor, para el valor antes puede ser de 0 a 2, pudiendo ser 1.9, 1.5… y lo mismo aplica para después pudiendo ser 2.1, 2.5…

Así que demos un valor antes de 1.9 quedando:

$$f'(1.9) = -4(1.9) + 8 = 0.4$$

La pendiente es positiva, esto es la pendiente de la recta crece

Ahora demos un valor después de 2.1 quedando:

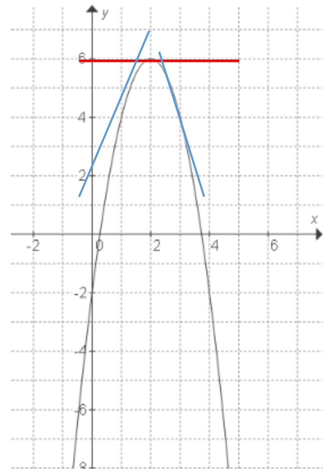
$$f'(1.9) = -4(2.1) + 8 = -0.4$$

La pendiente es negativa, esto es la pendiente de la recta decrece

Entonces debido que la pendiente antes es positiva y después del punto crítico la pendiente de la recta cambia a negativa, esto nos dice que el punto es máximo o bien aplicamos el a) del procedimiento porque es el que aplica.

4. Realice la gráfica de la función para observar lo calculado.

Para este punto es tan sencillo, como darle valores a la función, podemos darle valores a la x de -1 a 5 y graficar respectivamente las coordenadas obtenidas.



Nota; La pendiente siempre está cambiando de inclinación, debido que los puntos que se calcularon en este problema ejemplo están muy cerca del punto que tiene pendiente cero, se consideraron puntos un poco más distantes para su representación en la gráfica, al final todas las pendientes serán del mismo signo que los puntos considerados antes y después del punto crítico.

Problemas referentes al comportamiento de funciones y el uso de la derivada

La altura máxima y velocidad de impacto de un proyectil:

El objetivo es determinar la velocidad de impacto con el suelo y la altura máxima que alcanzará un proyectil lanzado verticalmente desde el nivel del piso con una velocidad inicial de 323.4 m/s. Después de hacer su recorrido, ¿se impactará el proyectil con el suelo a la misma velocidad con la que inició su recorrido?,

Nuevamente se considera la fórmula de altura, a veces se maneja con la variable h(t), del inglés "height", para nuestro caso d(t) después de todo la altura podemos decir que es una distancia vertical

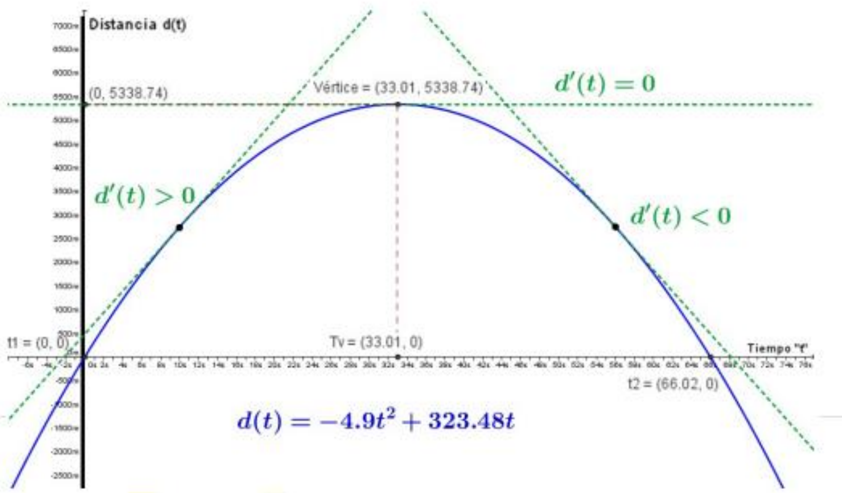
$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_o t + d_0$$

La gravedad se pone negativa por tener una dirección hacia abajo.

$$d(t) = -4.9t^2 + 323.4t$$

$$d'(t) = \frac{d}{dt}[d(t)] = -9{,}8t + 323.4$$

lo que representa la derivada en cualquier punto de la curva descrita por la función es la velocidad instantánea del proyectil en todo tiempo.



En la gráfica se observa que el vértice de la parábola representa la altura máxima que alcanza dicho proyectil, a dicho punto se le llam máximo de la función.

Efectivamente, ahí la recta tangente a la curva es horizontal, es decir, la derivada es igual a cero.

Las pendientes de las rectas tangentes son positivas.

A la derecha de este punto t_v del vértice, las rectas tangentes son negativas lo cual implica que es una función decreciente. Si la derivada siempre es positiva (o negativa) entonces la función es creciente (o decreciente) respectivamente. Por lo tanto, si en el problema planteado hacemos la derivada igual a cero, con esto encontramos el punto crítico donde van a cambiar las pendientes, entonces obtenemos la coordenada t_v es decir del vértice, de modo que podernos determinar la altura máxima que alcanza el proyectil. Es decir, $d'(t) = 0$

$$d'(t) = -9.8t + 323.4 = 0 \Rightarrow t_v = \frac{-323.4}{-9.8} = 33\ s$$

De lo que concluimos que la altura o distancia máxima es:

$$d(t_v) = d(33) = -4.9(33)^2 + 323.4(33) \Rightarrow d(33) = -5{,}336.1 + 10{,}672.2 = 5{,}336.1\ m$$

Es decir, el proyectil alcanza su altura máxima de 5,336.1 metros en 33 segundos, que no es otra cosa que las coordenadas del vértice de la parábola $V(t_v, d(t_v))$= $(33{,}536.1)$

Por último, para determinar la velocidad de impacto del proyectil con el suelo se evalúa la derivada de la función en el tiempo de choque (una de las dos soluciones de la función distancia y cuadrática), identificado por t2 en la gráfica anterior.

Para encontrar las soluciones t_1y t_2, utilizamos la fórmula general de segundo grado:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A partir de la función distancia del proyectil se tiene que: a = -4.9, b = -323.4 y c = 0. Sustituyendo valores tenemos: $a = 4.9, b = -323.4 \; y \; c = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-323.4 \pm \sqrt{(323.4)^2 - 4(-4.9)(0)}}{2(-4.9)} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-323.4 \pm 323.4}{-9.8}$$

$$t_1 = \frac{-323.4 + 323.4}{-9.8} = \frac{0}{-9.8} = 0$$

$$t_{,2} = \frac{-323.4 - 323.4}{-9.8} = \frac{-646.8}{-9.8} = 66\ s$$

Finalmente, al evaluar $t_2 = 66$ en la derivada de la función, se obtiene:

$$d'\,(66) = -9.8(66) + 323.4 \qquad d'\,(66) = -646.8 + 323.4 = 323.4$$

que representa la velocidad instantánea o de impacto del proyectil con el suelo.

Cabe señalar que la velocidad con la que choca el proyectil en el suelo es la misma velocidad con la que inició su recorrido para cualquier proyectil que se arroja verticalmente hacia arriba y sin contemplar la resistencia del aire.

Actividad 7

Resuelve los siguientes ejercicios de comportamiento de funciones, puntos críticos, máximos y mínimos.

1. ¿Cómo podemos predecir por inspección de una función cuadrática abre hacia arriba o hacia?

2 ¿En el criterio de la primera derivada, por qué los puntos críticos tienen pendiente cero?

3. Calcular los máximos y mínimos de la función. Escriba cada paso del procedimiento visto en esta sección para resolver los siguientes ejercicios.

a) $f(x) = 3x^2 + 30x + 76$

b) $f(x) = -2x^2 + 12x - 19$

c)$f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

4. Una bala disparada hacia arriba desde la superficie de la tierra puede alcanzar una altura de $s(t) = 260t - \frac{1}{2}32.2\,t^2$ después de t segundos.

a) ¿Cuánto tiempo tardará la bala para alcanzar su punto más alto?

b) ¿Cuál es la altura más alta alcanzada por la bala?

Autoevaluación Unidad 1

1. Determina: $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{3x+6}$

a. -2

b. 0

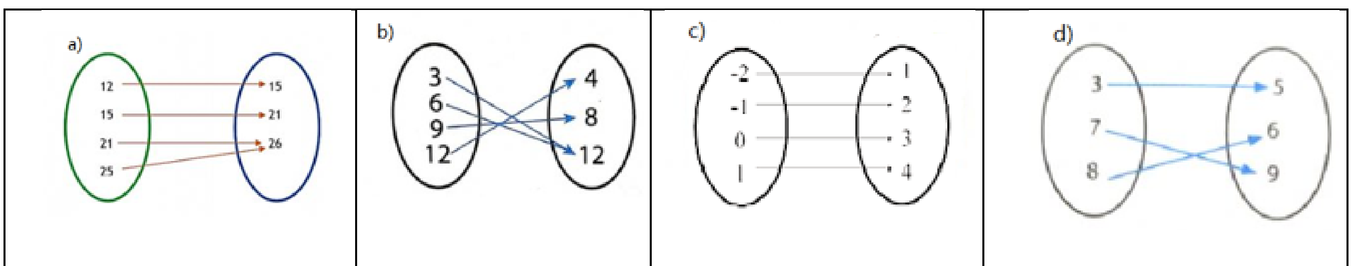
c. No existe.

d. 2/9

2. Determina $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2+2x+2}{4x^2-3}$

a) No existe b) $\frac{26}{33}$ c) 0 d) 5

3. En el siguiente diagrama, identifica los dominios que no representan una función



4. Selecciona la opción que representa la derivada de $y=\left(2x^{-2}+3\right)^{-3}$

a) $y'=8x^{-1}(2x^{-2}$ b) $y'=8x^{-3}(2x^{-2}.$ c) $y'=12x^{-3}(2x^{-2}.$ d) $y'=-3(2x^{-}$

5. Aplica el procedimiento correcto para identificar el resultado de $y=\frac{4x^2-3}{x-1}$

a) $y'=\frac{(x-1)^2}{4x^2-8x+}$ b) $y'=\frac{4x^2-8x+}{(4x-3)^2}$ c) $y'=\frac{4x^2-8x+}{(x-1)^2}$ d) $y'=\frac{-4x^2+8x}{(x-1)^2}$

6. Resuelve por derivada de un cociente: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4x}}{5^{x^2}}$

a) $$\frac{\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}\cdot 5^{x^2}-\sqrt{x^2+4x}\cdot 5^{x^2}\cdot \ln(5)\cdot 2x}{5^{2x^2}}$$

b) $\dfrac{\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}\cdot 5^{x^2}-\sqrt{x^2+4x}\cdot 5^{x^2}\cdot \ln(5)\cdot 2x}{\left(5^{x^2}\right)^2}$

c) $\dfrac{\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}\cdot 5^{x^2}-\sqrt{x^2+4x}\cdot 5^{x^2}}{5^{2x^2}}$

d) $\dfrac{\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}\cdot 5^{x^2}-\sqrt{x^2+4x}\cdot 5^{x^2}}{\left(5^{x^2}\right)^2}$

7. Resuelve por derivada de un producto $f(x)=(5x^2-3)(x^2+x+4)$

a) $20x^3+15x^2+34x-3$

b) $(10x)(x^2+x+4)+(2x+1)(5x^2-3)$

c) $(10x^3+10x^2+40x)+(10x^3+5x^2-6x-3)$

d) $(10x^3+10x^2+40x)$

8. Deriva la siguiente función por regla de la cadena $F(x)=\ln(3x^2-1)$

a) $\ln(3x^2-1)$

b) $(3x^2-1)$

c) $(\frac{1}{3x^2-1})\cdot(6x)$

d) $F'(x)=\frac{6x}{3x^2-1}$

9. Encuentra la derivada de la función $f(x)=7x^8+5x^{-3}$

a) $f(x)=8(7x^{8-1})+(-3)(5x^{-3-1})$

b) $f'(x)=56x^7-15x^{-4}$

c) $f'(x)=56x^7-\frac{15}{x^4}$

d) $f'=56x^{-7}-\frac{15}{x^{-4}}$

10. ¿Cuál es la derivada de la función con potencia $f(x)=3x^{-5}-2x^{-2}$

a) $=\frac{d}{dx}(-5x^{-6})$

b) $=-6\cdot(-5x^{-6-1}$

c) $f'(x)=\frac{30}{x^7}$

d) $=\frac{d}{dx}(-5x^{-6}$

Unidad 2

2. La derivada en la explicación de los fenómenos naturales y procesos sociales

¿Qué voy a aprender y cómo?

El último problema a estudiar tiene dos variantes. La primera variante consiste en la obtención de áreas de figuras con frontera curva, y la segunda es la determinación de la distancia recorrida por un móvil con una velocidad no uniforme. La resolución de las dos problemáticas anteriores hizo posible el inicio del cálculo integral.

Introducción

En esta unidad se define la operación de **integración** como la inversa de la diferenciación y los conceptos básicos a tratar del cálculo integral son la **antiderivada** de una función y la **integral definida**. El puente entre estas dos operaciones inversas y fundamentales del cálculo es el **teorema fundamental del cálculo**, que estudiaremos a detalle en esta unidad por medio del planteamiento y resolución de problemas que permitan realizar estimaciones sobre el comportamiento de un fenómeno natural y/o proceso social presente en tu entorno.

2.1 Antiderivada e integral indefinida

Supongamos que se nos pidió encontrar una función (distancia) G cuya derivada (velocidad instantánea) es $f(x) = 3x^2$. De lo estudiado en la primera unidad sobre derivadas, podemos deducir que: $G(X) = x^3$, debido a que, $\frac{d}{d(x)}[x^3] = 3x^2$, es decir,

$G'(x) = f(x)$.

Decimos que la función G es **una** antiderivada de f.

Actividad 1

Para cada una de las siguientes derivadas G, escribe la función original G.

La estrategia consiste en establecer una función $G(x)$ de tal forma que al derivar se obtenga la función dada en cada inciso, es decir, $\frac{d}{dx}[G(x)] = G'(x)$. Es muy importante considerar las leyes de los exponentes y las principales reglas de derivación. También revisa el formulario de la Unidad 1.

a) $G'(x) = 6x$

b) $G'(x) = x$

c) $G'(x) = \frac{1}{3}x^2$

d) $G'(x) = \frac{2}{x^3}$

e) $G'(x) = \cos x$

Definición de antiderivada

En general, una función G es una *antiderivada* de f sobre un intervalo I, si $G'(x) = f(x)$ para toda x en el intervalo I.

Es importante señalar que la función G se denomina **una** antiderivada de f, no **la** antiderivada de f. Para ver por qué, se debe notar lo siguiente:

$G_1(x) = x^3, G_2(x) = x^3 - 4, G_3(x) = x^3 + 61$ son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier constante C, la función dada por $G(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de f.

Teorema 1 Antiderivada general

Si la función F es una **antiderivada** de f sobre un intervalo I, entonces G representa toda la familia de antiderivadas de f sobre el intervalo I si y sólo si la función G tiene la forma: $G(x) = F(x) + C$, para toda x en el intervalo I y donde C es una constante arbitraria.

A partir del teorema anterior es posible representar toda la familia de antiderivadas de una función sumando una constante arbitraria a una antiderivada conocida. Por ejemplo, si se sabe que: $\frac{d}{dx}[-4.9x^2] = -9.8x$, es posible representar la familia de todas las antiderivadas de $f(x) = -9.8x$ mediante: $G(x) = -4.9x^2 + C$, *Familia de todas las antiderivadas de* $f(x) = -9.8x$ donde C es una constante. La constante C se llama **constante de integración**. La familia de funciones representada por G es la llamada antiderivada general de f, y $G(x) = -4.9x^2 + C$ es la solución general de la ecuación diferencial: $G'(x) = -9.8$.

Una ecuación diferencial en x y y es una ecuación que comprende a x, y, así como las derivadas de y. De esta forma, $y' = 2x$ y $y = 3x^2 + 4$ son ejemplos de ecuaciones diferenciales.

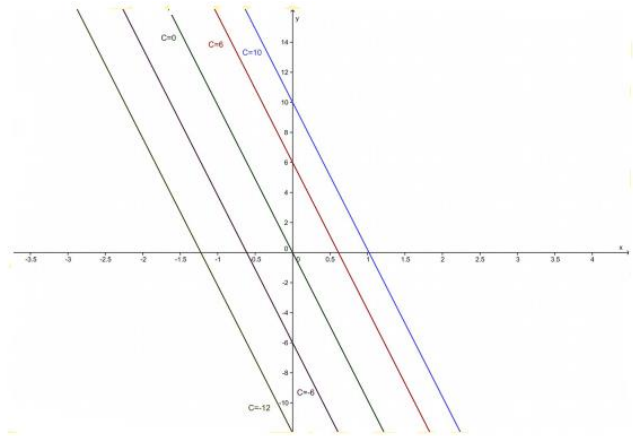
Ejemplo 1: Resolución de una ecuación diferencial

Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $y' = -9.8$

Solución: En principio, se debe encontrar una función cuya derivada sea -9.8.

La función $-9.8x$ es una de tales funciones; en otras palabras, es una antiderivada de -9.8. A partir del teorema 1 de esta unidad, la solución general de la ecuación diferencial es: y = $-9.8x + C$.

En la figura se muestran las gráficas de varias antiderivadas de $y = -9.8$ (funciones de la forma y= $-9.8x + C$.



Notación para las antiderivadas

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ es útil escribirla en su forma diferencial equivalente: $dy = f(x)dx$.

La operación de encontrar todas las soluciones de esta ecuación se llama antiderivación (o integral indefinida) y se indica con el **signo de integral**, $\int$. La solución general se denota por: $y = \int f(x)dx = F(x) + C$, donde $f(x)$es llamado **integrando**. La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la antiderivada de f con respecto a la x. Por consiguiente, la diferencial dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El concepto de **integral indefinida es sinónimo de antiderivada.**

Siempre que se escribe, $y = \int f(x)dx = F(x) + C$ significa que F es una antiderivada de f sobre un intervalo.

Ejemplo 2

Resolución de un problema de movimiento de un proyectil en caída libre

Si se lanza verticalmente una pelota hacia arriba despreciando la resistencia del aire, con una velocidad inicial de 49 metros por segundo desde una altura inicial de 10 metros, entonces el problema es: a) Determinar la función distancia, $d(t)$, que describe el movimiento de dicho proyectil en función del tiempo. b) Encontrar la altura máxima que alcanza la pelota sobre el nivel del suelo y en qué tiempo sucede esto.

Solución:

a) Sea $t = 0$, el tiempo inicial del fenómeno observado. Si la función $d(t)$ representa la posición de la pelota en el instante t, entonces, las dos condiciones iniciales dadas son:

$d(0) = 10$. La altura inicial es 10 metros.

$d'(0) = 49$, La velocidad inicial (derivada) es 49 metros por segundo.

Ahora bien, la aceleración debida a la gravedad es 9.8 m/s^2 y puesto que la derivada de la velocidad es precisamente la aceleración, se tiene $d''(t) = -9.8$ Implicando que

$d'(t) = \int d''(t)dt = \int -9.8dt = -9.8t + C_1$ de donde al utilizar la velocidad inicial se obtiene:

$d'(0) = 49 = -9.8(0) + C_1 = 49$, por lo que $d'(t) = -9.8t + 49$. Al integrar $d'(t)$ se obtiene $d(t) = \int d'(t)dt = \int(-9.8t + 49)dt = -4.9t^2 + 49t + C_2$ de donde al utilizar la altura inicial, se tiene:

$d(0) = 10 = -4.9(0)^2 + 49(0) + C_2$, lo que significa que C_2=10. Por lo tanto, la función distancia que describe la posición de la pelota en todo instante t está dada por:

$d(t) = -4.9t^2 + 49t + 10$

b) Para determinar la altura máxima que alcanza la pelota sobre el nivel del suelo hacemos uso del concepto de la derivada de la función distancia, $d'(t) = 0$, ya que justo en ese momento la pelota comienza a descender con velocidad instantánea igual a cero. La fórmula $d'(t) = -9.8t + 49 = 0$ representa geométricamente una recta tangente a la curva $d(t)$ con pendiente cero. Ahora vamos a determinar el tiempo en el que la pelota alcanza su altura máxima. $t = \frac{-49}{-9.8} = 5\ segundos$.

Al sustituir el valor en la función distancia se tiene que: $d(5) = -4.9\,(5)^2 + 49(5) + 10 = 132.5$ metros es la altura máxima que la pelota alcanza sobre el nivel del suelo. Observa que la función distancia del ejemplo anterior tiene la forma: $d(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 + v_0 t + d_0$, donde $g = -9.8\ {m}/{s^2}$, la velocidad inicial es: $v_0 = 49\,{m}/{s}$ y la altura o distancia inicial es $d_0 = 10m$ una función distancia que estudiamos en la primera unidad y reconocida por Galileo Galilei, sólo que en esta ocasión llegamos a ella a través de la operación inversa de la diferenciación, **la integración**.

2.2 Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación pueden comprobarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integral indefinida, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Para obtener $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$, es decir, la integración es la inversa de la derivación. Además, si $\int f(x)dx = F(x) + C$, entonces $\frac{d}{dx}\lfloor\int f(x)\,dx\rfloor = f(x)$, es decir, la derivación es la inversa de la integración. Estas dos ecuaciones permiten obtener las fórmulas de integración directamente de la derivación.

Ejemplo 3
Aplicación de las fórmulas de integración
Escribir las antiderivadas de $4x$. Solución:
Por regla de la constante múltiple: $\int 4x dx = 4\int x\, dx$
Al replantear con $x = x^1 = 4\int x^1 dx$
Por la regla de la potencia $(n = 1), = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$
Simplificando obtenemos $2x^2 + C$

A través de este ejemplo se observa que el patrón general de integración es similar al de la derivación. **Integral original → replantear → Integrar → Simplificar.**

	Fórmulas de derivación		Fórmulas de integración
1	$\frac{d}{dx}[k] = 0$		$\int 0\ dx = C$
2	$\frac{d}{dx}[x] = 1$		$\int k\ dx = kx + C$
3	$\frac{d}{dx}[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$		$\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\ dx$
4	$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$		$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$
5	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$		$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1$
6	$\frac{d}{dx}[ln\ x] = \frac{1}{x}$		$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
7	$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$		$\int e^x\, dx = e^x + C$
8	$\frac{d}{dx}[sen\ x] = \cos x$		$\int \cos x\, dx = sen\ x + C$
9	$\frac{d}{dx}[cos\ x] = -\operatorname{sen}\ x$		$\int \operatorname{sen} x\, dx = -cos\ x + C$
10	$\frac{d}{dx}[tan\ x] = \sec^2 x$		$\int \sec^2 x\, dx = tan\ x + C$
11	$\frac{d}{dx}[sec\ x] = \sec x\ \tan x$		$\int (\sec x\ \tan x)\, dx = sec\ x + C$
12	$\frac{d}{dx}[csc\ x] = -\csc x\ \cot x$		$\int (\csc\ x\ \cot x)\, dx = -csc\ x + C$
13	$\frac{d}{dx}[cot\ x] = -\csc^2 x$		$\int \csc^2 x\, dx = -cot\ x + C$
14	$\frac{d}{dx}[arc\ sen\ x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ sen\ x + C$

15	$\frac{d}{dx}[arc\ tan\ x] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$			$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arc\ tan\ x + C$
16	$\frac{d}{dx}[arc\ sec\ x] = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$			$\int \frac{dx}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}} = arc\ sec\ \lvert x\rvert + C$

Acorde a la tabla mostrada inmediata superior, observamos que las reglas básicas que aplican para las derivadas también aplican para la integración. Es de esperarse ya que vienen a ser las antiderivadas de la función. Por ejemplo, la **propiedad de linealidad** que aplica para la descomposición de las integrales que es la regla 4 de esta tabla. En forma similar aplica para las derivadas. De hecho, esta regla fue vista en la unidad 1 como: Regla de la suma y diferencia de funciones que aplica el teorema 5 para la derivación.

Las reglas básicas de integración listadas en la tabla de esta sección permiten integrar cualquier función polinomial, como se muestra a continuación:

Ejemplo 4 Integración de funciones polinomiales

a) $\int dx = \int 1dx = x + C$

b) $\int(3x-5)dx = 3\int xdx - \int 5dx = \frac{3x^2}{2} + C_1 - 5x + C_2 = \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$

c) $\int(-4x^5 + 2x^3 - x)dx = -4\int x^5dx + 2\int x^3dx - \int xdx = -\frac{4}{6}x^6 + \frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$

Simplificando, finalmente el resultado final es:

$$\int(-4x^5 + 2x^3 - x)dx = -\frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

Ejemplo 5 Replantear antes de integrar:

a) $\int \left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$

Nota: cuando se integran cocientes no se debe integrar por separado el numerador y denominador, esto no es válido en la integración y diferenciación.

$$\int \left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right) dx \neq \frac{\int (x+2)dx}{\int \sqrt{x}\ dx}$$

b) $\int \frac{sen\ x}{cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos\ x}\right)\left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right) dx = \int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$

Actividad 2

Identifica la antiderivada (integral) como la operación inversa de la derivada y resuelve los siguientes ejercicios.

I. En los ejercicios 1 a 3 verifica la igualdad demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. $\int\left(-\frac{9}{x^4}\right)dx=\frac{3}{x^3}+C$
2. $\int(x-2)(x+2)\,dx=\frac{1}{3}x^3-4x+C$
3. $\int\frac{x^2-1}{x^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{2\left(x^2+3\right)}{3\sqrt{x}}+C$

II. En los ejercicios 4 a 6 encuentra la solución general de la ecuación diferencial y verifica el resultado por derivación

4. $\frac{dy}{dt}=3t^2$
5. $\frac{dy}{dx}=x^{\frac{3}{2}}$

6. $\frac{dr}{d\theta}=\pi$

III. En los ejercicios 7 a 9 encuentra la integral indefinida y verifica el resultado por derivación.

7. $\int(x+3)\,dx$
8. $\int\left(2x-3x^2\right)dx$

9. $\int\frac{1}{x^3}dx$

El concepto de integral definida a partir del área bajo la curva

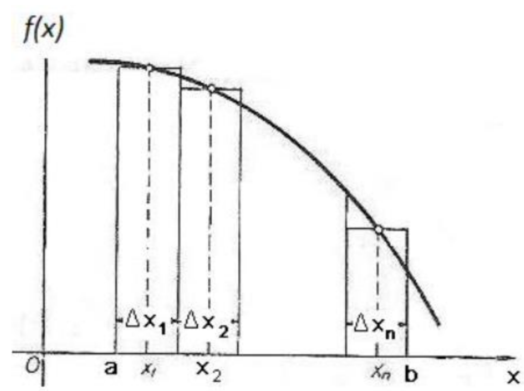
El calcular el área de una curva en un principio representó un problema porque no era aplicable directamente alguna fórmula, tal como lo era para figuras sencillas como: cuadrados o rectángulos. Por lo que se tuvieron que desarrollar métodos para calcular el área de una curva.

Uno de los métodos para calcular el área de una curva es dividirla en pequeños rectángulos, si obtenemos el área de cada rectángulo en que hemos dividido la curva podremos tener un área aproximada de dicha curva. En base a esto, se tiene la siguiente definición:

Sea f(x) una función continua en el intervalo desde x=a hasta x=b. Divide este intervalo en "n" subintervalos cuyas longitudes son Δx_1, Δx_2,..., Δx_n, y elije puntos, uno en cada subintervalo, que tengan las abscisas: x_1, x_2, ... x_n, respectivamente. Considérese la suma.

$$f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x_{n-1} + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Entonces si "n" tiende a infinito y cada Δx tiende a cero, esto es así porque al aumentar el número de rectángulos para que el área sea más precisa, esto hace que sean muy pequeños o bien tiendan a cero.



En cálculo integral, a esta sumatoria infinita se representa como: $\int_a^b f(x)dx$
Y se le define como Integral definida.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

La integral definida de una función continua en un intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ es el área bajo la curva de la función y el eje x entre a y b.

Si este límite existe, la función $f(x)$ se dice que es integrable en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, o que es una función integrable. El símbolo de integral indefinida (sin la a y la b arriba y abajo) representa una antiderivada. **Una integral definida es un número. Una integral indefinida es una familia de funciones.**

En una integral definida, por encima y por debajo del símbolo $\int$ (suma o sigma) están los límites del intervalo, $[a, b]$. Los números *a* y *b* son valores de $\mathbf{x}$ y se denominan límites de integración. Hablamos del límite de una suma dado que n→∞. En segundo lugar, los límites de la región se denominan *límites de integración*.

Teorema 2 La continuidad implica integrabilidad

Si una función f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Actividad 3

Una condición suficiente para que una función f sea integrable en [a, b], es que sea continua en dicho intervalo. La demostración de este teorema rebasa el propósito de este libro. Por lo pronto responde estos cuestionamientos.

1. ¿Es verdadero lo inverso del teorema 2? Es decir, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explica tu razonamiento y brinda algunos ejemplos.

2. Describe la relación entre continuidad, diferenciación e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más necesaria? ¿Cuál la menos?

Propiedades de las integrales definidas.

Definición de dos integrales definidas especiales

1. Si la función f se define en x = a, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. Si la función f es integrable $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Teorema 4 Propiedades de las integrales definidas

Si f y g son dos funciones integrables sobre $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables sobre $[a, b]$, de donde

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

Actividad 4

¿Cierto o falso? En los ejercicios siguientes determina si la afirmación es cierta o falsa. En caso de que sea falsa, explica por qué, u ofrece un ejemplo que justifique que es falsa.

1. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$

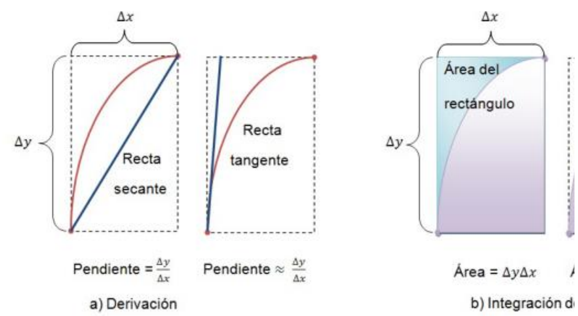
2. $\int_a^b [f(x) g(x)]\, dx = \left[\int_a^b f(x)\, dx\right]\left[\int_a^b g(x)\, dx\right]$

3. Si la función f aumenta sobre el intervalo$[a, b]$, entonces el valor mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ es $f(a)$.

2.3 El teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo establece la conexión que existe entre los diferentes problemas tratados de diferenciales e integrales.

De modo informal el **Teorema Fundamental del Cálculo**, señala lo evidente, que la derivación e integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación.



Cuando se define la pendiente de la recta tangente, se usa el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (pendiente de la recta secante). De igual forma, cuando se define el área de una región bajo la curva se utiliza el producto $\Delta y \Delta x$ (área de un rectángulo).

Teorema 5 Teorema fundamental del cálculo

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de integrales definidas mediante el teorema fundamental del cálculo (TFC)

Ejemplo 1

A partir del teorema fundamental del cálculo (TFC), encuentra:

$$\int_{2}^{3} x^3 dx$$

Solución:

$$\int_2^3 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4|_2^3 = \frac{1}{4}[3^4 - 2^4] = \frac{1}{4}[81 - 16] = \frac{1}{4}[65]$$

Por lo tanto, la respuesta final es:

$$\int_{2}^{3} x^3 dt = \frac{65}{4}$$

Ejemplo 2

A partir del teorema fundamental del cálculo (TFC), encuentra

$$\int_{0}^{\pi} sen(t)\, dt$$

Solución:

$$G(t) = \int_{0}^{\pi} sen(t)dt \Rightarrow G'(t) = sen(t) \Rightarrow G(t) = -cos(t)]_0^{\pi}$$

Por ser una integral definida es el límite superior menos el límite inferior. Para realizar estos cálculos la calculadora debe estar en radianes, las calculadoras trabajan con diferentes modalidades, la calculadora deberá estar en modo rad.

$$G(t) = -\cos(\pi) - [-cos(0)] = -(-1) - (-1) = 2$$

Finalmente, la respuesta es:

$$\int_0^{\pi} sen(t)\, dt = 2$$

Actividad 5

Aplica los conceptos y procedimientos para la obtención de la antiderivada y del Teorema Fundamental del Cálculo

1. Explica qué se quiere decir con la proposición "la derivación y la integración son operaciones o transformaciones inversas".

---

2. Si $F'(a) = G'(x)$ sobre el intervalo cerrado $\lfloor a, b \rfloor$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

3. Si la función f es continua sobre $\lfloor a, b \rfloor$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

4. Encuentra la derivada de

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

5. A partir del teorema fundamental del cálculo (TFC), encuentra:

a) $\int_0^1 2x dx$
b) $\int_{-1}^0 (x-2)dx$
c) $\int_1^5 4dx$

En el cálculo de las integrales definidas anteriores usando el TFC, la parte medular del procedimiento es encontrar una función que al derivarse nos da la **función f** que queremos integrar, a la que hemos llamado antiderivada de f a partir de lo tratado en el inicio de la unidad. El valor de la **constante de integración** es la antiderivada evaluada en el extremo izquierdo del intervalo de integración y finalmente el valor de la **integral definida** es la antiderivada evaluada en el extremo derecho menos la antiderivada evaluada en el extremo izquierdo, mismo que es consecuencia inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo.

2.4 Integración por sustitución

Integración por sustitución es un método de integración que se basa en la regla de la cadena para derivadas. En otras palabras, nos ayuda a integrar composiciones de funciones. Cuando buscamos antiderivadas, básicamente realizamos una "diferenciación inversa". En algunos casos, esta operación es muy sencilla. Por ejemplo, sabemos que la derivada de X^2es $2x$, por lo que $\int 2xdx = x^2 + C$. Podemos usar este sencillo razonamiento con otras funciones básicas, como $sen\, x, e^x, \frac{1}{x}$ etcétera. Otros casos, sin embargo, no son tan simples. Por ejemplo, ¿cuánto vale $\int \cos(3x+5)dx$? Pista: no es $sen\,(3x+5) + C$. Verás por qué:

$$\frac{d}{dx}[\sin(3x+5)+C]$$

$$=\cos(3x+5)\cdot\frac{d}{dx}[3x+5]$$

$$=3\cos(3x+5)$$

Un método que puede ser muy útil es un **cambio de variables**, que básicamente es el inverso de la regla de la cadena.

1. Escribir nuestra integral en esta forma: $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$	2. Ahora tenemos **g(x)** y su derivada **g'(x)** $\int \cos(x^2)\, 2x\, dx$	Cuando nuestra integral está configurada así, podemos hacer **esta sustitución**: $\int f(\underline{g(x)})\, \underline{g'(x)\, dx}$ $\downarrow$ $\int f(u)\, du$

Imagina que nos piden encontrar $\int 2x\cos(x^2)\,dx$. Observa que $2x$ es la derivada de x^2, que es la función "interior" de la función compuesta $\cos(x^2)$. En otras palabras, si $u(x)=x^2$ y $w(x)=\cos(x)$, entonces:

$$\overbrace{2x}^{u'}\underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{u})}_{w}=u'(x)w\Big(u(x)\Big)$$

Esto siguiere que podemos usar un cambio de variable. Veamos cómo se hace.

Ejemplo 1

$\int \cos(x^2)\, 6x\, dx$

Solución:

Reorganiza la integral de esta manera: $\int \cos(x^2)\, 6x\, dx = 3\int \cos(x^2)\, 2x\, dx$

Saca de la integral las constantes que están multiplicando $3\int \cos(u)\, du = 3\ \text{sen}\ (u) + C$

Ahora pon de vuelta $u=x^2$: $3\,\text{sen}(x^2) + C$

Ejemplo 2

$\int x/(x^2+1)\,dx$

Solución:

Reorganizamos así: $\int x/(x2+1)\,dx = ½\int 2x/(x2+1)\,dx$

Luego se tiene:

$$½\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$½\int 1/(u)\,du$$

Resuelve la integral: $½\int 1/u\,du = ½\ln(u) + C$

Ahora sustituye $u=x^2+1$: $½\ln(x^2+1) + C$

Ejemplo 3

$$\int e^{5x}(5)dx$$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es echar un vistazo si la función se encuentra con su derivada, y observamos que sí, entonces:

$g'(x) = 5$ $\quad$ $f(g(x)) = f(5x) = e^{5x}$

Por lo tanto, podemos integrar, ya que la integral se encuentra completa.

$$\int e^{5x}(5)dx = e^{5x} + C$$

Actividad 6

Resuelve las siguientes integrales por el método de sustitución

Calcula la integral de:

1.

$$\int 3(1+2x)^4 dx$$

2. $\int (x^2+1)^2 2x dx$
3 $\int e^{3x}(3)dx$

2.5 Regla general de la potencia para la integración

La integral de una potencia de x es igual a x elevado a la potencia más 1 y dividido por la potencia más 1.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Explicación

1. $\int (x^2+1)^5 \, 2x \, dx$

Solución:

* Se hace $u = x^2 + 1$. Luego, $du = 2x\,dx$

* Se sustituyen "u" y "du" en la integral.

$$\int (x^2+1)^5 \, 2x \, dx = \int u^5 \, du$$

* Se resuelve la integral resultante.

$$\int (x^2+1)^5 \, 2x \, dx = \int u^5 \, du = \frac{u^{5+1}}{5+1} + c = \frac{u^6}{6} + c$$

* Se reemplaza "u", para volver a la variable "x"

$$\int (x^2+1)^5 \, 2x \, dx = \int u^5 \, du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(x^2+1)^6}{6} + c$$

* Finalmente: $\int (x^2+1)^5 \, 2x \, dx = \frac{(x^2+1)^6}{6} + c$

Actividad 7

Evalúa cada una de las integrales siguientes y resuelve el ejercicio aplicando las reglas de potencia de integrales.

1. $\int (x^4 - 6x^2 - 2x + 4)\,dx$

2. $\int 3x^2 dx$

3. $\int x^7 dx$

4. $\int (7x^7 + 5x^2) dx$

Valor promedio y área comprendida entre dos curvas

El valor promedio de una función y el área comprendida entre dos curvas son aplicaciones de la integral definida.

El cálculo del valor promedio de una función y el área comprendida entre dos curvas tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas. Por ejemplo, el valor promedio de una función se puede utilizar para calcular la velocidad promedio de un objeto en movimiento en un intervalo de tiempo dado.

El área comprendida entre dos curvas se puede utilizar para calcular el cambio neto en una cantidad física como la posición o la velocidad de un objeto en movimiento.

2.6 Valor promedio de una función

Por ejemplo, si calcularas el promedio de tus calificaciones, utilizarías una fórmula como la siguiente:

$$\bar{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

Y tus calificaciones son de: 80, 85, 90, 90 y 100

Esto equivale a $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)$ respectivamente. Sumamos los valores y los dividimos entre el número de materias a promediar, que para este caso "n" es 5 por tratarse de 5 materias.

Ahora bien, de una manera similar se puede obtener el promedio de un área.

f(x) está definida y es continua para todos los puntos en un intervalo [a, b]. Entonces, el valor promedio de f(x) sobre está definido como:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Debemos recordar que en el ejemplo de las calificaciones son variables discretas, es decir, son finitas y se pueden contar 1,2,3,4,5; en el caso de las variables continuas es un intervalo.

Ejemplo: Encuentre el valor promedio de la función f(x) = x^2 en el intervalo [1, 3]

Solución:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 4.33$$

Esto nos dice que un rectángulo de altura 4.33 multiplicados por el intervalo de 3-1=2 tiene la misma área que tendría la parábola (curva) en el mismo intervalo 3-1 o bien una base de 2.

2.7 Aplicaciones de la integración en el concepto trabajo

Supongamos que la partícula P recorre una trayectoria en el espacio a lo largo del eje x, para determinar el trabajo que se realiza sobre esta partícula en un desplaza miento a lo largo de las posiciones **a** y **b**, hacemos una partición en el intervalo [**a**,**b**] en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx. Sea x_i* un punto en el subintervalo$[x_{i-1}, x_i]$, si **F** es continua en el intervalo [**a**,**b**] entonces podemos aproximar el trabajo como una suma dada como:

$$Trabajo \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x$$

Por tanto, se define el trabajo efectuado al mover una partícula u objeto en el intervalo [a, b] como el límite cuando n→∞ como:

$$\boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x = \int_a^b F(x)dx}$$

Ley de Hooke

La ley de Hooke establece que la fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte a una cierta longitud a partir de su estado de equilibrio, es proporcional a x, es decir:

$$F = -kx$$

Donde k es la constante del resorte o constante de fuerza del resorte, esta constante k es una característica propia del resorte. Nótese que k es positiva. Por ejemplo, una fuerza de 40N se requiere para retener un resorte desde su longitud natural de 10 cm. a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se hace al estirar el resorte de 15 a 18 cm.?

Tenemos un resorte, de acuerdo con la ley de Hooke que:

$$F = kx$$

donde k se denomina constante del resorte, la fuerza que se requiere para mantener el resorte estirado x metros más allá de su longitud natural es $f(x) = -kx$

Para realizar este cálculo, primero calculamos k, vemos que cuando el resorte se pasa de 10 a 15 cm, la cantidad estirada es de 5 cm=0.05 cm, lo que quiere decir que f(0,05)=40, de modo que $f(0.05) = 0.05k = 40 \Rightarrow k = \frac{40}{0.05} = 800$. El trabajo para estirar el resorte de 15 a 18 cm es:

$$W = \int_{0.05}^{0.08} (800)x dx = 800 \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_{0.05}^{0.08} = 400\left[(0.08)^2 - (0.05)^2\right] = 1.56J$$

Actividad 8

Resuelve los siguientes ejercicios del concepto de trabajo en el área de la física como una aplicación más de la integración.

1. Cuando una partícula se ubica a una distancia de x pies del origen, una fuerza de $x^2 + 2x$ libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla desde $x = 1$ hasta $x = 3$?

Pista parte de la definición de $W = \int_1^3 (x^2 + 2x)dx$ trabajo:

2. Una partícula eléctrica q_1, está en reposo con una carga de 2C efectúa un trabajo sobre otra partícula eléctrica q_2 a una distancia de 20 cm con carga 1 C. ¿Cuánto trabajo se efectúa al momento de moverla 40 cm?

Recuerda aplicar la ley de Coulomb $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$

Para iniciar el cálculo del trabajo, tenemos que:

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_{0.2}^{0.4} k\frac{q_1 q_2}{r^2}dr =$$

3. Encuentre el valor promedio de las funciones en los intervalos que se te indican:

a) $f(x) = x^2, [0,2]$

b) $f(x) = x^3, [0,2]$

2.8 Cálculo integral en fenómenos naturales y procesos sociales

Algunos ejemplos de **fenómenos naturales** donde es posible aplicar el cálculo matemático empleando operaciones o procesos como las derivadas, es la medición realizada a la tasa de crecimiento de la cantidad de lluvias por año. Otro ejemplo donde hacemos uso de las derivadas, es el cálculo de la velocidad instantánea de los sismos acaecidos en un territorio específico, y a partir de este valor, empleando la integración, podemos a su vez hallar la cantidad de terremotos acontecidos.

En los **procesos sociales**, los cálculos de derivadas e integrales se utilizan en estudios de dinámica de las poblaciones, población económicamente activa, empleo, desempleo, pobreza, migración nacional e internacional, estructura social, economía, PIB, estructura del ingreso, problemas sociales contemporáneo y desarrollo sustentable.

Autoevaluación Unidad 2

Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int(x^4 - 4x^2 + 4x - 2)dx.$

a) $= \int x^4dx - \int 4x^2dx + \int 4xdx - \int 2dx$

b)$= \int(x^4 - 4x^2 + 4x - 2)dx$

c)= $\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + K.$

d) $= \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2x$

2. $\int(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})dx.$

a) $= \int \sqrt[3]{x}dx + \int \sqrt{x}dx$

b) $= \int x^{1/3}dx + \int x^{1/2}dx$

c) = $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$

d) = $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + K.$

3. $\int(\frac{1}{2x} + \sqrt{2x})dx.$

a) $= \int \frac{1}{2x}dx + \int \sqrt{2x}dx.$

b) $= \frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}} + K$

c) = $\int \sqrt{2x}dx = \int(2x)^{1/2}dx$

d) = $\int \sqrt{2x}dx = \int(2x)^{1/2}dx$

Aplica el procedimiento de integrales definidas para resolver los siguientes ejercicios.

4. $\int_2^4(2x^3 - x^2 - x)dx.$

a)= $\frac{286}{3}$ b) = $\frac{300}{3}$ c) = $\frac{237}{3}$ d)= $\frac{312}{3}$

5. $F = \int_a^b f(x)dx$

a) = 1 b) = 3 c) = 2 d)= 4

6. $\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{e^{x^2+x}}dx.$

a) = $1 - e^2$ b)= 1-e^3 c)= 1-e^{-2} d)= $1 - e^{-3}$

7. Por el método de sustitución, resuelve la siguiente integra $\int x(2x+1)^3dx$

a) $= \frac{(2x+1)^4}{80}(8x-1)+c$ b) = $\frac{2x-1^4}{80}(8x+1)+C$ c) $= \frac{(2x+1)^4}{80}(8x-1)$ d)= = $\frac{2x-1^4}{80}(8x+1)$

8. Aplica nuevamente el método de sustitución para resolver el siguiete ejercicio. $\int e^{3x-5}dx$

a))= $\frac{1}{3}e^{3x-5}+1$ b) = $\frac{1}{3}e^{3x+5}$ c)= $\frac{1}{3}e^{3x+5}+C$ d) $= \frac{1}{3}e^{3x-5}+C$

9.

Un cuerpo se desplaza en línea recta por acción de una fuerza variable y continua $F = f(x) = x^3$+1desde la posición a hasta la posición b. Sin considerar el rozamiento, ¿cuál es el trabajo que realiza la fuerza $f(x)$ para desplazar el cuerpo. Se tiene entonces:

$$W = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow W = \int_0^5 (x^3+1)\,dx \Rightarrow$$

a) 161.25 J.

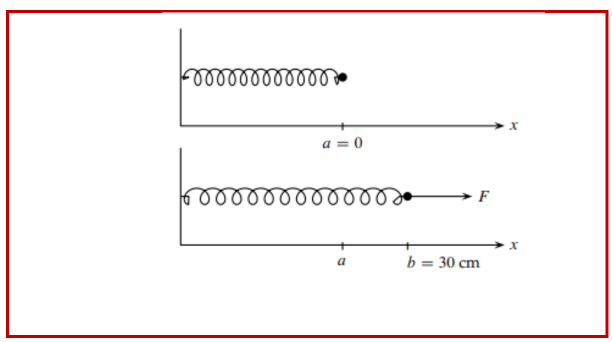
b) 190 05J.

c) 114.27 J.

d) 152.78 J.

10.

Un resorte se encuentra sujeto a una pared por uno de sus extremos. La constante k del resorte es de $\frac{8.3N}{cm}$. ¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza f para alargar el resorte 30 cm? El trabajo está dado por la expresión: $W = \int_a^b kx\,dx.$



a) 37.35 J b) 43.02 J c) 32.32 J d) 38,00 J

Respuestas de Autoevaluaciones

Respuestas Autoevaluación 1

1. b)	2. b)	3. b)	4. c)	5). c
6. a)	7. a)	8. d)	9. c)	10. c)

Respuestas Autoevaluación 2

1. c)	2. d)	3. b)	4. a)	5. a)
6. c)	7. a)	8. d)	9. a)	10. a)

Soluciones de actividades

Unidad 1

Actividad 1

1. $d(t) = -4.9t^2 + 78.4$

2. Se trata de una parábola cóncava hacia abajo

3. Es el eje vertical $d(t)$

4. $d(0) = -4.9(0) + 78.4 = 78.4$

5. Representa el corte en el eje vertical, de hecho, es el punto de partida del fenómeno observado.

6. La sustitución queda 0 =-4.9t^2 + 78.4. Al despejar la variable independiente se obtiene

$$t = \pm\sqrt{\frac{78.4}{4.9}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \text{ s.}$$

7. Cierto, los puntos son $t_1 = (-4.0)$ y $t_2 = (4.0)$. De hecho, el tiempo establecido por t_2 es el momento de impacto del proyectil con el piso, mientras que el tiempo t^1 carece de sentido en el fenómeno estudiado.

Actividad 2

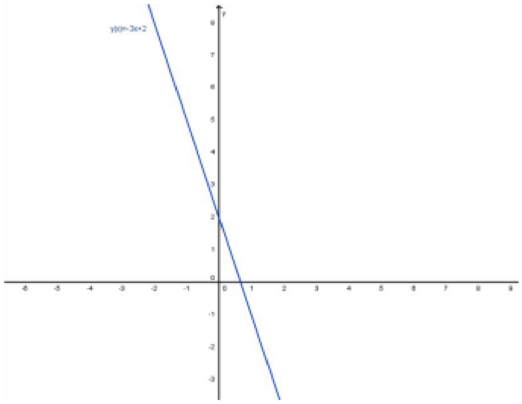
1. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 9x^2 - 4x$

2. $y' = -\frac{7}{(2x-1)^2}$

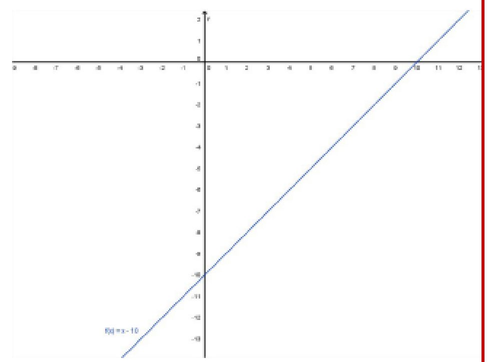
3. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$

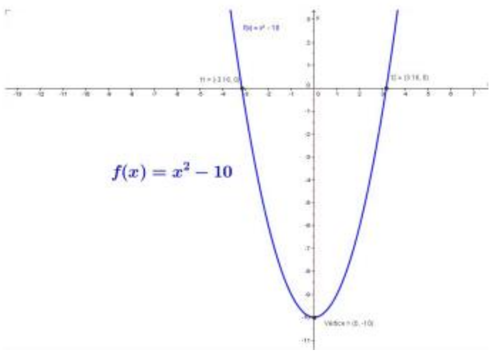
Actividad 3

1. a)

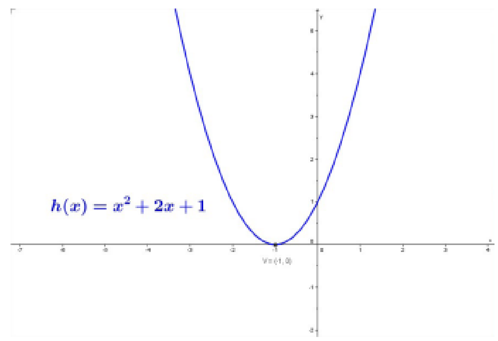


b)



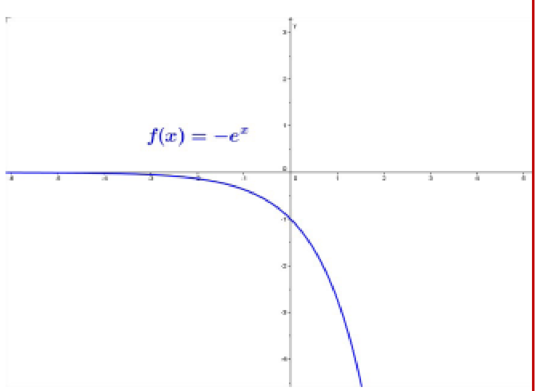


2a)

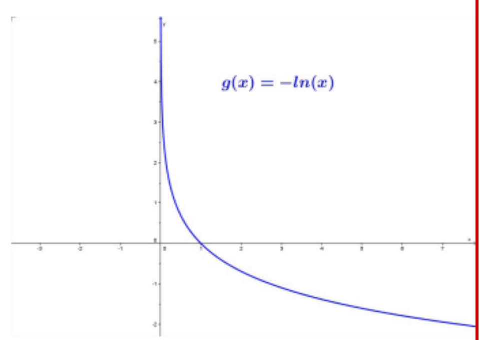


1b)

3. a)



b)



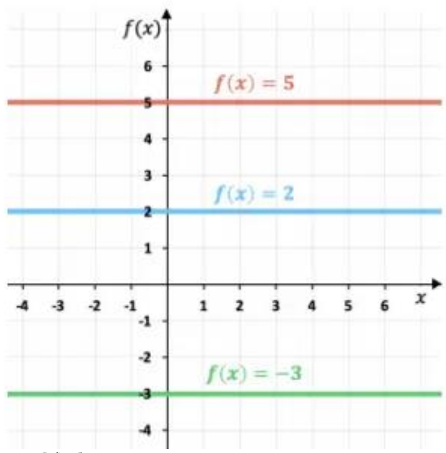
Actividad 4

1 a) f(x)=5

b) f(x)=2

c) f(x)= -3

2.



La primera función, $f(x) = 4$, es una función constante ya que siempre vale 4 independientemente del valor que tome la variable x.

La segunda función, $g(x) = x + 3$, no es una función constante por que el valor de la función varia dependiendo del valor de x. Se trata de una función afín.

La tercera función, $h(x) = 0$, siempre es igual a 0 por cualquier valor de x, por tanto, sí que es una función constante.

La cuarta función, $z(x) = 5x$, no es una función constante porque varia según el valor de x. Es una función lineal.

3.

a) $4x^3$

b) $10x^4$

c) $6x$

4.

a) $f'\ (x) = 6x$

b) $f'(x) = 48x^3$-$48x$

c) $f'(x) = 6\sqrt{9}x - 5\sqrt{9}$

Actividad 5

1. a) $\frac{d}{dx}f(x) = 6x^2 - 14x - 10$

b)$\frac{d}{dx}f(x) = -3x^2 - 6x - 9$

c) $\frac{d}{dx}f(x) = 21x^2 - 6x - 4$

2. Derivadas de las funciones de seno y coseno

a) $f\,'(x) = 4\cos(4x)$

b) $f\,'(x) = 4x^3 cos(x^4)$

3. Regla del producto de funciones

a) $f'(x) = 120x^4 + 18x^2 - 56x$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2$

c) $f'(x) = 2x$

Actividad 6

1. $f\,'(x) = 6x \cdot (x^2 - 3)^2$

2. $f\,'(x) = 15\,e^{3x}$

3. $\frac{-76x}{(2x^2-2)^2}$

4. $f\,'(x) = sec^2(x)$

5. $f\,'(x) = sec(x)tan(x)$

Actividad 7

1. Mediante el signo que se encuentra en el coeficiente “a” del término x^2. Si es negativo la abertura de la parábola abre hacia abajo, en caso contrario, si es positivo la abertura abrirá hacia arriba.

2. Por que la inclinación de la recta tangente es horizontal. Es decir, tiene pendiente cero. Poe lo mismo, también marcan un parteaguas de pendientes positivas y negativas. O bien divide de un lado las pendientes como positivas o negativas según sea el caso.

3.

a) Punto crítico: (-5,1), parábola abre hacia arriba, el punto es mínimo

b) Punto crítico: (3,-1), parábola abre hacia abajo, el punto es máximo

c) Punto crítico: (-1,1), parábola abre hacia arriba, el punto es mínimo.

4.

a) t = 8.074 segundos

b) h(8.074)= 1049.7 metros

Unidad 2

Actividad 1

a) $G(x)=3x^2$

b) $G(x)=\frac{1}{2}x^2$

c) $G(x)=\frac{1}{9}x^3$

d) $G(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$

e) $G(x)=\operatorname{sen} x$

Actividad 2

I. En los ejercicios 1 a 3 verifica la igualdad demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. Si

$$G(x)=\frac{3}{x^3}+C=3x^{-3}+C,$$

entonces

$G'(x)=-9x^{-4}=-\frac{9}{x^4}=f(x)$ –el integrando–. $\int (x-2)(x+2)\,dx=\frac{1}{3}x^3-4x+C$

2. Si

$$G(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+C,$$

entonces

$$G'(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)=f(x)\text{ –el integrando–.}$$

3. Si

$$G(x)=\frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}}+C,$$

Sea $u=2(x^2+3)$ y $v=3\sqrt{x}$,

entonces $u'=4x$ y $v'=\frac{3}{2\sqrt{x}}$,

Ahora bien, por la regla del cociente se tiene

$$G'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2}$$

$$G'(x)=\frac{12x\sqrt{x}-\frac{3x^2-9}{\sqrt{x}}}{9x}=\frac{\frac{9x^2-9}{\sqrt{x}}}{9x}=\frac{9x^2-9}{9x^{\frac{3}{2}}}=f(x)\text{ –el integrando–.}$$

II. En los ejercicios 4 a 6 encuentra la solución general de la ecuación diferencial y verifica e l resultado por derivación

4. $\frac{dy}{dt}=3t^2$

Respuesta: $y=t^3+C$, puesto que: $\frac{dy}{dt}=3t^2$

5. $\frac{dy}{dx}=x^{3/2}$

Respuesta: $y=\frac{2}{5}x^{5/2}+C$, puesto que: $\frac{dy}{dx}=x^{3/2}$

6. $\frac{dr}{d\theta}=\pi$

Respuesta: $r=\pi\theta+C$, puesto que: $\frac{dr}{d\theta}=\pi$

III. En los ejercicios 7 a 9 encuentra la integral indefinida y verifica el resultado por derivación

7. $\int (x+3)dx$

Respuesta: $\frac{1}{2}x^2+3x+C$, puesto que

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+3x+C\right)=(x+3)=f(x)$ –el integrando–.

8. $\int (2x-3x^2)dx$

Respuesta: x^2-x^3+C

9. $\int \frac{1}{x^3}dx$

Respuesta: $-\frac{1}{2x^2}+C$

Actividad 3

1. Es falso que una función integrable sea necesariamente continua. Por ejemplo, la función f que es igual a 1 en el intervalo $[0, 1]$ y 2 en el intervalo $[1, 2]$. Está claro que la función no es continua, pero si puede ser integrable, siempre y cuando se utilicen métodos por suma de incrementos de áreas.

2. La integrabilidad es la condición más necesaria, mientras que la menos necesaria es la diferenciabilidad

Actividad 4

1. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Respuesta: Verdadero

2. $\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$

Respuesta: Falso.

$$\int_0^1 [x\,x^2]\,dx \neq \left[\int_0^1 x\,dx\right]\left[\int_0^1 x^2\,dx\right]$$

$$\frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

Actividad 5

1. Explica que se quiere decir con la proposición "la derivación y la integración son operaciones o transformaciones inversas". Sugerencia: Teorema Fundamental del Cálculo.

2. Verdadero

3. Verdadero

4. $$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

5.

a) 1

b) -5/2

c) 16

Actividad 6

1. $$\int 3(1+2x)^4 dx = \frac{3(1+2x)^5}{10} + C$$

2. $\frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$

3. $e^{3x} + C$

Actividad 7

1. $$\int (x^4 - 6x^2 - 2x + 4)\, dx = \frac{x^5}{5} - 2x^3 - x^2 + 4x + C$$

2. $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C$

3. $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C$

4. $\int (7x^7 + 5x^2) dx = \frac{7}{8}x^8 + \frac{5}{3}x^3 + C$

Actividad 8

1. $$W = \int_1^3 (x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]\Bigg|_1^3 = \frac{3^3}{3} + 3^2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{50}{3}$$ =16.6 lb/pie

2.

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_{0.2}^{0.4} k\frac{q_1 q_2}{r^2}dr = \int_{0.2}^{0.4} k\frac{(2C)(1C)}{r^2}dr = 2C^2k\int_{0.2}^{0.4}\frac{dr}{r^2}$$

$$= 2C^2k\left[-\frac{1}{r}\right]\Big|_{0.2}^{0.4} = 2C^2k\left(2.5\frac{1}{m}\right)$$

Como $k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$, entonces:

$$W = 4.5 \cdot 10^{10} J$$

3. a) 4/3

   b) 2

EL GOBIERNO DEL NUEVO

2021 2027

NUEVO LEÓN